UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA
1.0 10 Luglio 2017

SULL'INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI MULTIVOCHE

LAUREANDO

GIUSEPPE VITILLARO

RELATORI

PATRIZIA PUCCI e CALOGERO VINTI

ANNO ACCADEMICO 1980/1981

Introduzione

È noto che, dai lavori iniziali di Hukuara e di Aumann e più recentemente di Debreu, la teoria di integrazione per multifunzioni a valori in sottoinsiemi di uno spazio di Banach X separabile e riflessivo ha avuto in questi ultimi anni un crescente interesse e sviluppo.

Di particolare utilità sono i teoremi di rappresentazione per l'integrale di una multifunzione, teoremi, ad esempio, che riducano tale integrale vettoriale e multivoco a integrali di opportune funzioni a valori reali.

Lo scopo principale di questa tesi è di dare un teorema di rappresentazione che, come caso particolare, contiene un risultato dovuto a Datko [10], risultato quest'ultimo che non si esprime come una proposizione di rappresentazione.

La tecnica da noi utilizzata fa uso essenzialmente dei funzionali supporto, tecnica introdotta, in questa problematica, da Artstein nell'ambito degli spazi finito dimensionali.

Questa tesi si articola nei seguenti quattro capitoli.

In [5], [10] Datko introduce due metriche, d_ν, d, definite sulla famiglia $\overline{co}K(X)$ dei sottoinsiemi chiusi, limitati, convessi e non vuoti di uno spazio di Banach X riflessivo e separabile, che sembrano le più naturali da considerarsi negli spazi infinito dimensionali.

Nel Capitolo 1 si forniscono alcune caratterizzazioni sulla $d_\nu-$ e $d-$convergenza, non dimostrate in [5], [10] e si prova che

$$d_\nu \leq d \leq h \quad ,$$

essendo h la metrica di Hausdorff. Inoltre si fa vedere, attraverso due esempi, che le minorazioni valgono in generale in senso stretto.

Si prova altresì che le d_ν e d, definite attraverso un insieme ν numerabile ed ovunque denso di S_X, dipendono strettamente dall'insieme ν stesso.

Di particolare interesse si presenta il seguente teorema:

"**Teorema** (teorema 2.12 Capitolo 1)**.**
Sia $(A_n)_n$ una successione in $\overline{co}K(X)$ e sia A in $\overline{co}K(X)$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $(A_n)_n$ converga ad A nella metrica d_ν, cioè $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$ è che:

$$\lim_n \left| s(x'_i, A_n) - s(x'_i, A) \right| = 0 \quad , \textit{per ogni } i = 1, 2, ... \text{ ''}$$

che generalizza una affermazione senza dimostrazione di Datko [10].

Infine si fa vedere l'equivalenza tra la $d_\nu-$convergenza e la $d-$convergenza per successioni uniformemente limitate.

Nel Capitolo 2 si applicano le proprietà generali dei funzionali sublineari e di quelli convessi alle funzioni supporto. Si prova, in particolare che $p : X' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ è un funzionale sublineare, semicontinuo inferiormente, con $p(0) = 0$, se e solo se esiste un insieme H chiuso, convesso e non vuoto tale che

$$p(x') = s(x', H) \ .$$

Nel Capitolo 3, attraverso uno studio preliminare delle proprietà della metrica di Hausdorff, si stabilisce l'equivalenza delle topologie $\tau_{d_\nu}, \tau_d, \tau_h$.

La dimostrazione di questa proposizione verte sul teorema (2.1, Capitolo 3) qui provato che afferma che in qualsiasi spazio m-dimensionale ogni vettore non nullo si può esprimere come combinazione lineare a coefficienti positivi di m vettori di un qualsiasi sottoinsieme ovunque denso.

Nel Capitolo 4, dopo aver introdotto i concetti ed alcune proprietà delle multifunzioni misurabili e dei selettori misurabili, si introduce la definizione di integrale secondo Aumann.

Infine si prova il teorema principale di questa tesi:

"**Teorema** (teorema 3.1 Capitolo 4)**.**
Sia $(T, \mathscr{T}, \mu)$ uno spazio di misura fornito di una misura μ positiva, finita, non atomica e di una $\sigma-$algebra $\mathscr{T}$, $\mu-$completa.

Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione misurabile e a valori chiusi, non vuoti. Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

(i) esiste una funzione integrabile $g \in L_1(T)$, $g \geq 0$, tale che per ogni $x' \in S'$ si ha:
$-g(t) \leq s(x', F(t)) < +\infty$, *per ogni* $t \in T$;

(ii) L'integrale della F è non vuoto.

Allora per ogni x' in X', risulta:

$$s\left(x', cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) =$$
$$= \int s(x', F(t))\,\mathrm{d}\mu(t)$$

e inoltre $\quad cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) =$

$$= \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq \int s(x', F(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \ , \ \textit{per ogni} \ \ x' \in X' \right\} \ . \text{“}$$

Si illustra con un esempio che la tesi del teorema è la più generale possibile in quanto anche nell'ambito degli spazi finito dimensionali esistono multifunzioni misurabili a valori compatti e convessi aventi integrale un insieme non chiuso .

Capitolo 1

Metriche su spazi di sottoinsiemi

1 Alcune osservazioni preliminari

In questo paragrafo premettiamo alcune affermazioni che verranno largamente usate nello studio di certe metriche definite su spazi di sottoinsiemi.

%

Lemma 1.1.
Siano A, B due insiemi non vuoti e sia $f : A \times B \to \tilde{\mathbb{R}}$ un'applicazione da $A \times B$ a valori in $\tilde{\mathbb{R}}$.

Allora valgono:

(i) $\sup\limits_{b \in B} \inf\limits_{a \in A} f(a, b) \leq \inf\limits_{a \in A} \sup\limits_{b \in B} f(a, b)$;

(ii) $\sup\limits_{a \in A} \sup\limits_{b \in B} f(a, b) = \sup\limits_{b \in B} \sup\limits_{a \in A} f(a, b)$.

Prova

(i) Fissiamo $x \in A$. Allora $\inf\limits_{a \in A} f(a, y) \leq f(x, y) \leq \sup\limits_{b \in B} f(x, b)$, per ogni punto y di B.

Perciò $\sup\limits_{b \in B} \inf\limits_{a \in A} f(a, b) \leq \sup\limits_{b \in B} f(x, b)$, per ogni x di A.

Così $\sup\limits_{b \in B} \inf\limits_{a \in A} f(a, b) \leq \inf\limits_{a \in A} \sup\limits_{b \in B} f(a, b)$.

(ii) Fissiamo $y \in B$. Allora $f(x, y) \leq \sup\limits_{x \in B} f(x, b)$, per ogni $x \in A$.

Perciò $\sup\limits_{x \in A} f(a, y) \leq \sup\limits_{x \in A} \sup\limits_{b \in B} f(a, b)$, per ogni punto y di B.

Analogamente si prova la disuguaglianza inversa scambiando il ruolo di B con quello di A.

$\square$

%

Teorema 1.2.
Sia X un insieme non vuoto e siano τ_1, τ_2 due topologie su X.

Supponiamo che (X, τ_1) sia uno spazio topologico primo numerabile.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la topologia τ_2 sia più debole della topologia τ_1, cioè $\tau_2 \subseteq \tau_1$, é che ogni successione $(x_n)_n$ a valori in X, che converga ad un punto x_0 di X nella topologia τ_1, converga al punto x_0 anche nella topologia τ_2.

Prova

Parte necessaria

Sia $(x_n)_n$ una successione a valori in X che converga nella topologia τ_1 ad un punto x_0 di X.

Allora vale la seguente affermazione: per ogni intorno U di x_0, nella topologia τ_1, esiste un intero N tale che $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$ implicano che x_n appartiene ad U.

Pertanto, essendo per ipotesi τ_2 più debole di τ_1 risulta: per ogni intorno U di x_0 nella topologia τ_2, esiste un intero N tale che $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq N$ implicano che x_n è in U.

Quindi $(x_n)_n$ converge ad x_0 nella topologia τ_2.

Parte sufficiente

Supponiamo che ogni successione $(x_n)_n$ a valori in X, che converge ad un punto x_0 nella topologia τ_1, converga al punto x_0 anche nella topologia τ_2.

Consideriamo gli spazi topologici (X, τ_1) ed (X, τ_2).

Per ipotesi lo spazio topologico (X, τ_1) é primo numerabile.

Consideriamo l'applicazione identità $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ definita da: $i(x) = x$, per ogni x in X.

Sia $(x_n)_n$ una successione a valori in X che converge ad un punto x_0 di X, nella topologia τ_1.

Poiché per ipotesi ogni successione in X che sia τ_1-convergente a qualche punto di X è τ_2-convergente al medesimo punto, la successione $(x_n)_n$ converge ad x_0 nello spazio topologico (X, τ_2).

Allora la successione $(i(x_n))_n$ converge ad $i(x_0)$ nello spazio topologico (X, τ_2).

Così abbiamo provato che la applicazione identità i è continua per successioni.

Dato che lo spazio topologico (X, τ_1) è primo numerabile, ciò equivale a dire che la mappa identità $i : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ è continua, cioè $U \in \tau_2$ implica $U = i^{-1}(U) \in \tau_1$. Allora $\tau_2 \subseteq \tau_1$ e quindi la topologia τ_2 é più debole della topologia τ_1. $\square$

%

Corollario 1.3.
Sia X un insieme non vuoto e siano $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ due metriche su X.

Supponiamo che ogni successione $(x_n)_n$ *a valori in* X *che converge ad un punto* x_0 *di* X *nella metrica* d_1*, cioè con* $\lim_n d_1(x_n, x_0) = 0$*, converga al punto* x_0 *anche nella metrica* d_2*, cioè* $\lim_n d_2(x_n, x_0) = 0$*.*

Allora la topologia τ_2 *definita dalla metrica* d_2 *su* X *è più debole della topologia* τ_1 *definita dalla metrica* d_1 *su* X*, cioè* $\tau_2 \subseteq \tau_1$*.*

Prova

É una immediata conseguenza del teorema precedente. $\square$

%

2 Definizione delle metriche di Datko d_ν e d

Indicheremo, nel seguito, con X, lo spazio di Banach sui numeri reali $X = (X, \|\cdot\|)$, che supporremo separabile e riflessivo e con X', X'' il duale e il biduale topologici di X rispettivamente, in altre parole

$$X' = \left\{x' : X \to \mathbb{R} \mid x' \text{ é lineare e limitato } \right\}$$
$$X'' = \left\{x'' : X \to \mathbb{R} \mid x'' \text{ é lineare e limitato } \right\}.$$

Inoltre useremo le seguenti notazioni

$$S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$$
$$S' = \left\{x' \in X' \mid \|x'\| = 1\right\}.$$

%

Definizioni 2.1.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X.

Definiamo la funzione SUPPORTO di A

$$s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$s(x', A) = x'(A) = \sup_{x \in A} x'(x) \text{ , per ogni } x' \text{ in } X'.$$

Definiamo, inoltre, la NORMA di A come

$$\|A\| = \sup_{x \in A} \|x\|.$$

Notiamo che A è un sottoinsieme limitato di X se e solo se la norma di A è un numero reale non negativo.

%

Teorema 2.2.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X e sia $s(\cdot, A)$ la funzione supporto di A. Allora valgono le seguenti affermazioni:

(i) $s(x' + y', A) \leq s(x', A) + s(y', A)$, *per ogni* x', y' *in* X';

(ii) $s(ax', A) = as(x', A)$, *per ogni* x' *in* X' *ed* a *in* $\mathbb{R}_0^+$;

(iii) *se A é un sottoinsieme limitato di X, allora* $|s(x', A)| \leq \|A\|\|x\| < +\infty$, *per ogni* x' *in* X'.

Prova

La (i) discende dalla monotonia dell'estremo superiore e la (ii) e' ovvia.

Per quanto riguarda la (iii), osserviamo che per ogni x' in X' risulta:

$$\begin{aligned}\|s(x',A)\| &= \left|\sup_{x\in A} x'(x)\right| \leq \sup_{x\in A} |x'(x)| \leq \sup_{x\in A} \|x'\|\|x\| = \\ &= \|x'\| \sup_{x\in A} \|x\| = \|A\|\|x'\|\end{aligned}$$

Perciò $|s(x',A)| \leq \|A\|\|x'\| < +\infty$, per ogni x' in X', in quanto A è un sottoinsieme limitato di X.

Quindi la funzione supporto $s(\cdot, A)$ di A, è una funzione a valori reali. $\square$

%

Definizioni 2.3.
Indicheremo con $K(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi, limitati, non vuoti di X e con $\overline{co}K(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi, limitati, convessi, non vuoti di X.

Definiamo l'applicazione $\rho : K(X) \times K(X) \to \mathbb{R}_0^+$ come segue:

$$\rho(A,B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \|x-y\|$$

per ogni A e B in $K(X)$.

Definiamo l'applicazione $h : K(X) \times K(X) \to \mathbb{R}_0^+$ come segue:

$$h(A,B) = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}$$

per ogni A e B in $K(X)$.

Indicheremo ancora con h la restrizione della metrica di Hausdorff al sottoinsieme $\overline{co}K(X)$ di $K(X)$.

%

Finalmente daremo le definizioni delle due metriche alternative a quella di Hausdorff, che sono state studiate da R. Datko in [10], [5] e che verranno analizzate in dettaglio, in questo paragrafo.

%

Osservazione 2.4.
Poiché X é uno spazio di Banach separabile e riflessivo, il duale topologico X' di X è uno spazio di Banach separabile.

Ne segue che la sfera unitaria S' di X' è un sottospazio separabile di X'.

%

Definizioni 2.5.
Sia $\nu = \{x'_i\}_i$ un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso nella sfera unitaria S' di X', che supporremo fissato.

Definiamo le metriche:

$$d, d_\nu : \overline{co}K(X) \times \overline{co}K(X) \to \mathbb{R}_0^+$$

come segue

$$d_\nu(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A) - x'_i(B)|}{1 + |x'_i(A) - x'_i(B)|} \ ;$$

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(A) - x'_i(B)| \ ;$$

per ogni A e B in $\overline{co}K(X)$, sottoinsiemi chiusi, limitati, convessi, non vuoti dello spazio di Banach X.

Ricordiamo che $x'_i(A) = s(x'_i, A) = \sup_{x \in A} x'_i(A)$, per ogni A in $\overline{co}K(X)$ e per ogni intero i.

Ovviamente la metrica d_ν è ben definita.

Fissiamo due elementi A e B di $\overline{co}K(X)$.

Osserviamo che, poiché A e B sono non vuoti e limitati, risulta:

$$|x'_i(A) - x'_i(B)| \leq |x'_i(A)| + |x'_i(B)| \leq \|A\| \|B\|$$

per ogni intero $i = 1, 2, ...$.

Da cui segue che anche d è ben definita.

%

Teorema 2.6 (Datko [10])**.**
Sia H in $\overline{co}K(X)$.

Per ogni $i = 1, 2, ...$ definiamo il sottoinsieme H_i di X come segue:

$$H_i = \{x \in X \mid x'_i(x) \leq x'_i(H)\}$$

Allora risulta che:

$$H = \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$$

Prova

Ovviamente $H \subseteq H_i$, per ogni $i = 1, 2, ...$, cioè:

$$H \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i \ .$$

Per assurdo supponiamo che esista $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} H_i$ tale che $p \notin H$.

Allora per il Teorema V.2.10 di Dunford-Schwartz [13] esistono un numero reale c, un numero reale positivo $\epsilon > 0$ e un funzionale lineare e limitato $x' \in S'$, tali che:

(+) $x'(q) \leq c - 2\epsilon < c \leq x'(p)$, per ogni q in H.

Scegliamo un numero reale positivo M in modo che:

$$\|H\| \leq M \quad \text{e} \quad \|p\| \leq M \ .$$

In corrispondenza ad $\epsilon/(2M)$ esiste un numero intero j tale che:

$$\|x'_j - x'\| \leq \epsilon/(2M) \ .$$

Fissato $q \in H$, risultano:

$$|x'_j(q) - x'(q)| \leq \|x'_j - x'\|\|q\| < \epsilon/(2M) \cdot M = \epsilon/2$$
$$|x'_j(p) - x'(p)| \leq \|x'_j - x'\|\|p\| < \epsilon/(2M) \cdot M = \epsilon/2 \ .$$

Da queste ultime disuguaglianze e dalla (+) risulta:

$$x'_j(q) < x'(q) + \epsilon/2 \leq x'(p) - 2\epsilon + \epsilon/2 <$$
$$< x'_j(p) + \epsilon/2 - 2\epsilon + \epsilon/2 = x'_j(p) - \epsilon \qquad \text{ovvero}$$

$$x'_j(q) < x'_j(p) - \epsilon \qquad \text{, per ogni } \ q \text{ in } H \ .$$

Dall'arbitrarietà di $q \in H$ si ha:

$$x'_j(H) \leq x'_j(p) - \epsilon < x'_j(p) \ .$$

Poiché $p \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} H_i$ risulta:

$$x'_j(p) \leq x'_j(H) < x'_j(p) \ : \text{ assurdo.}$$

Dunque $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \subseteq H$.

Così il lemma è completamente provato. $\square$

%

Corollario 2.7.
Siano A e B due elementi di $\overline{\text{co}}K(X)$.

Se $x'_i(A) = x'_i(B)$ per ogni $i = 1, 2, ...$ allora $A = B$.

Prova

In virtù del teorema 2.6 risulta:

$$A = \left\{ x \in X \mid x'_i(x) \leq x'_i(A) \ , \ i = 1, 2, ... \right\}$$
$$B = \left\{ x \in X \mid x'_i(x) \leq x'_i(B) \ , \ i = 1, 2, ... \right\} \ .$$

Fissato $x \in A$ si ha:

$$x'_i(x) \leq x'_i(A) \leq x'_i(B) \qquad , \text{per ogni } i = 1, 2, ... \ .$$

cioè x appartiene a B.

Pertanto A è contenuto in B.

Analogamente si prova l'inclusione inversa scambiando il ruolo di A con quello di B. $\square$

%

Teorema 2.8.
Le applicazioni d, d_ν sono due metriche sullo spazio $\overline{\text{co}}K(X)$ dei sottoinsiemi chiusi, convessi, non vuoti di X.

Prova

Dapprima proviamo che d_ν è una metrica su $\overline{co}K(X)$.

(a)$_\nu$ Ovviamente

$$0 \leq d_\nu(A, B) < +\infty$$

per ogni A e B in $\overline{co}K(X)$.

(b)$_\nu$ Banalmente d_ν è simmetrica.

(c)$_\nu$ Si vede immediatamente che se $A = B$ allora

$$d_\nu(A, b) = 0 \ .$$

Ora se $d_\nu(A, B) = 0$ si ha che

$$|x_i'(A) - x_i'(B)| = 0 \ , \text{ per ogni } i = 1, 2, ...$$

cioé $x_i'(A) = x_i'(B)$, per ogni $i = 1, 2, ...$
Quindi per il corollario 2.7 si ha che $A = B$.

Pertanto $d_\nu(A, B) = 0$ se e solo $A = B$.

(d)$_\nu$ Siano A, B, C tre elementi di $\overline{co}K(X)$.
Sia i un intero fissato.
Allora:

$$|x_i'(A) - x_i'(B)| \leq |x_i'(A) - x_i'(C)| + |x_i'(C) - x_i'(B)| \ .$$

Poiché la funzione $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \frac{z}{1+z}$, con z in $\mathbb{R}_0^+$, é monotona crescente si ha:

$$\frac{|x_i'(A) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(B)|} \leq \frac{|x_i'(A) - x_i'(B)| + |x_i'(C) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(B)| + |x_i'(C) - x_i'(B)|} =$$
$$= \frac{|x_i'(A) - x_i'(C)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(B)| + |x_i'(C) - x_i'(B)|} + \frac{|x_i'(C) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(B)| + |x_i'(C) - x_i'(B)|} \leq$$
$$\leq \frac{|x_i'(A) - x_i'(C)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(C)|} + \frac{|x_i'(C) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(C) - x_i'(B)|}.$$

Per l'arbitrarietà dell'intero i si ha che:

$$\frac{|x_i'(A) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(B)|} \leq \frac{|x_i'(A) - x_i'(C)|}{1 + |x_i'(A) - x_i'(C)|} + \frac{|x_i'(C) - x_i'(B)|}{1 + |x_i'(C) - x_i'(B)|}$$

per ogni intero $i = 1, 2, ...$

Ne segue che:

$$
\begin{aligned}
&d_\nu(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A) - x'_i(B)|}{1 + |x'_i(A) - x'_i(B)|} \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left\{ \frac{|x'_i(A) - x'_i(C)|}{1 + |x'_i(A) - x'_i(C)|} + \frac{|x'_i(C) - x'_i(B)|}{1 + |x'_i(C) - x'_i(B)|} \right\} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A) - x'_i(C)|}{1 + |x'_i(A) - x'_i(C)|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(C) - x'_i(B)|}{1 + |x'_i(C) - x'_i(B)|} = \\
&\quad = d_\nu(A,C) + d_\nu(C,B) \ .
\end{aligned}
$$

Allora: $d_\nu(A,B) \leq d_\nu(A,C) + d_\nu(C,B)$.

Pertanto abbiamo provato che d_ν è una metrica su $\overline{co}K(X)$.

Proviamo ora che d è una metrica su $\overline{co}K(X)$.

(a) Da quanto osservato in precedenza

$$0 \leq d(A,B) < +\infty$$

per ogni $A, B \in \overline{co}K(X)$.

(b) Ovviamente d è simmetrica.

(c) Naturalmente se $A = B$ allora $d(A,B) = 0$.

Ora supponiamo che $d(A,B) = 0$. Allora:

$$x'_i(A) = x'_i(B) \ \text{ per ogni } i = 1, 2, ...$$

e quindi per il corollario 2.7 si ha che $A = B$.

(d) La disuguaglianza triangolare per d discende semplicemente da quella per il modulo in $\mathbb{R}$.

$\square$

%

Definizioni 2.9.

(1) Denoteremo con τ_ν *la topologia dalla metrica* d_ν *sullo spazio* $\overline{co}K(X)$.

Per definizione τ_ν *è la topologia generata su* $\overline{co}K(X)$ *dalla base:*

$$\mathscr{B}_\nu = \left\{ B_\nu(A,\epsilon) = \left\{ B \in \overline{co}K(X) \mid d_\nu(A,B) < \epsilon \right\} \middle| A \in \overline{co}K(X) \ e \ \epsilon > 0 \right\}.$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

(2) Denoteremo con τ_d *la topologia dalla metrica* d *sullo spazio* $\overline{co}K(X)$.

Per definizione τ_d *è la topologia generata su* $\overline{co}K(X)$ *dalla base:*

$$\mathscr{B}_d = \left\{ B_d(A,\epsilon) = \left\{ B \in \overline{co}K(X) \mid d(A,B) < \epsilon \right\} \middle| A \in \overline{co}K(X) \ e \ \epsilon > 0 \right\}.$$

$\circ \quad \circ \quad \circ$

(3) Denoteremo con τ_h *la topologia dalla metrica di Hausdorff* h *sullo spazio* $\overline{co}K(X)$.

Per definizione τ_h *è la topologia generata su* $\overline{co}K(X)$ *dalla base:*

$$\mathscr{B}_h = \left\{ B_h(A,\epsilon) = \left\{ B \in \overline{co}K(X) \mid h(A,B) < \epsilon \right\} \middle| A \in \overline{co}K(X) \ e \ \epsilon > 0 \right\}.$$

%

Teorema 2.10.
Consideriamo le tre metriche d_ν, d, h *sullo spazio* $\overline{co}K(X)$.

Allora per ogni $A, B \in \overline{co}K(X)$ *risulta:*

$$d_\nu(A,B) \leq d(A,B) \leq h(A,B) \ .$$

Prova

Siano A e B due elementi di $\overline{co}K(X)$.

Da:

$$\frac{|x_i'(A) - x_i'B|}{1 + |x_i'(A) - x_i'B|} \leq |x_i'(A) - x_i'(B)| \text{ per ogni } i = 1, 2, ...$$

discende:

$$d_\nu(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A) - x'_i B|}{1 + |x'_i(A) - x'_i B|} \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(A) - x'_i(B)| = d(A,B) \ .$$

Così: $d_\nu(A,B) \leq d(A,B)$.

Per il lemma 1.1 risulta:

$$\begin{aligned}\rho(A,B) &= \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \|x-y\| = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \sup_{x'\in S'} \big[x'(x) - x'(y)\big] \geq \\ &\geq \sup_{x\in A} \sup_{x'\in S'} \inf_{y\in B} \big[x'(x) - x'(y)\big] = \sup_{x'\in S'} \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \big[x'(x) - x'(y)\big] = \\ &= \sup_{x'\in S'} \sup_{x\in A} \left[x'(x) - \sup_{y\in B} x'(y)\right] = \sup_{x'\in S'} \left[\sup_{x\in A} x'(x) - \sup_{y\in B} x'(y)\right] = \\ &= \sup_{x'\in S'} \big[x'(A) - x'(B)\big] \ , \quad \text{e analogamente}\end{aligned}$$

$$\rho(B,A) \geq \sup_{x'\in S'} \big[x'(B) - x'(A)\big] \ .$$

Allora:

$$\begin{aligned}h(A,B) &= \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\} \geq \\ &\geq \max\left\{\sup_{x'\in S'} \big[x'(A) - x'(B)\big] \, , \sup_{x'\in S'} \big[x'(B) - x'(A)\big]\right\} = \\ &= \sup_{x'\in S'} |x'(A) - x'(B)| \ .\end{aligned}$$

Allora:

$$|x'_i(A) - x'_i(B)| \leq \sup_{x'\in S'} |x'(A) - x'(B)| \leq h(A,B)$$

per ogni $i = 1, 2, \ldots$.

Così:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(A) - x'_i(B)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} h(A,B) = h(A,B) \ .$$

Ne segue che $d(A,B) \leq h(A,B)$.

In conclusione:

$$d_\nu(A,B) \leq d(A,B) \leq h(A,B)$$

per ogni A e B in $\overline{co}K(X)$. $\square$

%

Corollario 2.11.
Le topologie τ_ν, τ_d, τ_h *stanno nella relazione:*

$$\tau_\nu \subseteq \tau_d \subseteq \tau_h \ .$$

Prova

L'affermazione discende dal teorema precedente e dal corollario 1.3 . $\square$

%

Teorema 2.12 (Datko [10])**.**
Sia $(A_n)_n$ *una successione in* $\overline{co}K(X)$ *e sia* A *in* $\overline{co}K(X)$.

Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $(A_n)_n$ *converga ad* A *nella metrica* d_ν*, cioè affinché* $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$*, è che:*

$$\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0 \ , \ \textit{per ogni } i = 1, 2, \ldots \ .$$

Prova

<u>Parte necessaria</u>
Supponiamo che $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$.
Fissiamo due interi i, n .
Allora per definizione di $d_\nu(A_n, A)$ si ha:

$$\frac{1}{2^i} \frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} \leq d_\nu(A_n, A)$$

e quindi:

$$\frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} \leq 2^i d_\nu(A_n, A) \ .$$

Notiamo ancora che:

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| = \frac{\frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|}}{\frac{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)| - |x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|}} =$$

$$= \frac{\frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|}}{1 - \frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|}} \ .$$

Pertanto per ogni $i = 1, 2, ...$ risultano:

$$\frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} \leq 2^i d_\nu(A_n, A) \ ,$$

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| = \frac{\frac{|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}{1+|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}}{1-\frac{|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}{1+|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}} \ ,$$

per ogni $n = 1, 2, ...$.

Fissiamo un intero i ed $\epsilon > 0$.
In corrispondenza ad $\epsilon/2^i(1+\epsilon)$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che:
se $n \geq N$, allora $d_\nu(A_n, A) < \frac{1}{2^i}\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$.
Sia $n \geq N$ fissato. Allora:

$$\frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} \leq 2^i d_\nu(A_n, A) < 2^i \frac{1}{2^i}\frac{\epsilon}{1+\epsilon} =$$
$$= \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \ .$$

Così:

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| = \frac{\frac{|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}{1+|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}}{1-\frac{|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}{1+|x_i'(A_n)-x_i'(A)|}} <$$
$$< \frac{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}{1-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{1+\epsilon}{1} = \epsilon \ .$$

Pertanto $|x_i'(A_n) - x_i'(A)| < \epsilon$, per ogni $n \geq N$.
Ne segue che $\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0$, per ogni $i = 1, 2, ...$.

<u>Parte sufficiente</u>

Supponiamo che

$$\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0 \ , \text{ per ogni } i = 1, 2, ... \ .$$

Fissiamo $\epsilon > 0$.
In corrispondenza ed $\epsilon/2$ esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon/2 \ .$$

Fissiamo un intero n.

Da

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon/2$$

segue che:

$$(+) \qquad \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} < \epsilon/2 \ ,$$

per ogni intero n.

Fissiamo $i = 1, ..., p$.

In corrispondenza di $i \in \mathbb{N}$ ed $\epsilon/2p > 0$ esiste un numero intero $N_i = N_i(i, \epsilon/2p)$ tale che se $n \geq N_i$ allora risulta:

$$|x'_i(A_n) - x'_i(A)| < \epsilon/2p \ .$$

Poniamo:

$$N = N(\epsilon) = \max\{N_1, N_2, ..., N_p\} = \max_{i=1,...,p} N(i, \epsilon/2p) \ .$$

Se $n \geq N$ allora:

$$|x'_i(A_n) - x'_i(A)| < \epsilon/2p \qquad \text{per ogni } i = 1, ..., p \ ,$$

da cui,

$$\frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} \leq \frac{1}{2^i}|x'_i(A_n) - x'_i(A)| <$$
$$< \frac{1}{2^i}(\epsilon/2p) < \epsilon/2p \ ,$$

quindi:

$$\frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} < \epsilon/2p \qquad \text{per } i = 1, ..., p \ ,$$

per ogni intero n .

In conclusione da quest'ultima disuguaglianza e da (+) scriviamo:

$$\begin{aligned} d_\nu(A_n, A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} = \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} + \\ &+ \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i'(A_n) - x_i'(A)|}{1 + |x_i'(A_n) - x_i'(A)|} < \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

per ogni $n \geq N$, cioè $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$. □

%

Corollario 2.13.
Sia $(A_n)_n$ una successione in $\overline{co}K(X)$ e sia A in $\overline{co}K(X)$.

(a) Se $\lim_n d(A_n, A) = 0$, allora $\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0$, per ogni $i = 1, 2, \ldots$.

(b) Se $\lim_n h(A_n, A) = 0$, allora $\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0$, per ogni $i = 1, 2, \ldots$.

Prova

La dimostrazione discende dai teoremi 2.10 e 2.12. □

%

Teorema 2.14.
Sia $(A_n)_n$ una successione in $\overline{co}K(X)$ e sia A in $\overline{co}K(X)$.
Supponiamo che la successione $(A_n)_n$ goda delle proprietà:

(1) $\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots$;

(2) esiste una successione di numeri reali positivi $(M_i)_i$ con $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} M_i < +\infty$, tale che per ogni intero i risulta:
$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| \leq M_i$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

Allora la successione $(A_n)_n$ converge ad A, nella metrica d.

Prova

Sia $(M_i)_i$ una successione di numeri reali positivi con $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} M_i < +\infty$, di cui al punto (2).

Fissiamo $\epsilon > 0$.
In corrispondenza ad $\epsilon/2$ esiste un numero intero p tale che:

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon/2 \ .$$

Pertanto:

$$(+) \qquad \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| \leq \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} M_i < \epsilon/2 \ ,$$

per ogni $n = 1, 2, ...$.

Fissiamo $i = 1, ..., p$.

In corrispondenza ad i ed $\epsilon/2p$ esiste un numero intero $N_i = N(i, \epsilon/2p)$ tale che se $n \leq N_i$, risulta:

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| < \epsilon/2p \ .$$

Poniamo:

$$N = N(\epsilon) = \max \{N_1, N_2, ..., N_p\} = \max_{i=1,...,p} N(i, \epsilon/2p) \ .$$

Pertanto risulta:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| < \sum_{i=1}^{p} \epsilon/2p = p \cdot \epsilon/2p = \epsilon/2$$

per ogni $n \leq N$.
Da quest'ultima disuguaglianza e dalla (+) si ha:

$$\begin{aligned} d(A_n, A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| < \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \ , \end{aligned}$$

per ogni intero $n \geq N$, cioè $\lim\limits_{n} d(A_n, A) = 0$. $\square$

%

Definizione 2.15.
Sia $(A_n)_n$ una successione di sottoinsiemi, non vuoti, dello spazio di Banach X.

Diremo che la successione $(A_n)_n$ è UNIFORMEMENTE LIMITATA se esiste un numero reale positivo $M > 0$ tale che:

$$\|A_n\| = \sup_{x \in A_n} \|x\| \leq M \textit{ per ogni intero } n \in \mathbb{N} \ .$$

%

Teorema 2.16.
Sia $(A_n)_n$ una successione in $\overline{co}K(X)$ e sia A in $\overline{co}K(X)$.

Supponiamo che la successione $(A_n)_n$ goda delle proprietà:

(1) $\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0$ *per ogni* $i = 1, 2, ...$ *;*

(2) $(A_n)_n$ *è uniformemente limitata.*

Allora la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d.

Prova

Per ipotesi, secondo la definizione 2.15, esiste un numero reale positivo $M > 0$ tale che:

$$\|A_n\| = \sup_{x \in A_n} \|x\| \leq M \text{ per ogni intero } n \in \mathbb{N} \ .$$

Poiché vale:

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| \leq \|A_n\| + \|A\| \ , \text{ per ogni } n, i \in \mathbb{N}$$

risulta

$$|x_i'(A_n) - x_i'(A)| \leq M + \|A\| \ , \text{ per ogni } n, i \in \mathbb{N} \ .$$

Posto $L = M + \|A\|$ si ha:

$$|x'_i(A_n) - x'_i(A)| \leq L \text{ , per ogni } n, i = 1, 2, ... \quad .$$

Posto $M_i = L > 0$ per ogni $i = 1, 2, ...$ è evidente che $(M_i)_i$ è una successione di numeri reali positivi, con $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} M_i = L < +\infty$, tale che per intero i si ha:

$$|x'_i(A_n) - x'_i(A)| \leq M_i \text{ , per ogni } n = 1, 2, ... \quad .$$

Allora, per l'ipotesi (1) del teorema, sono soddisfatte le ipotesi (1), (2) del teorema 2.14 e così la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d. □

%

Teorema 2.17.
Sia $(A_n)_n$ una successione in $\overline{co}K(X)$ e sia in $\overline{co}K(X)$.

Supponiamo che la successione $(A_n)_n$ sia uniformemente limitata.

Allora la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν, se e solo se la successione $(A_n)_n$ nella metrica d.

Prova

Parte necessaria

Supponiamo che la successione $(A_n)_n$ converga ad A nella metrica d_ν.

Per la parte necessaria del teorema 2.12 risulta:

$$\lim_n |x'_i(A_n) - x'_i(A)| = 0 \text{ , per ogni } i = 1, 2, ... \quad .$$

Inoltre per ipotesi la successione $(A_n)_n$ e' uniformemente limitata, allora, per il teorema 2.16 la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d.

Parte sufficiente

Supponiamo che la successione $(A_n)_n$ converga ad A nella metrica d, cioè $\lim_n d(A_n, A) = 0$.

Per il teorema 2.10 si ha: $0 \leq d_\nu(A_n, A) \leq d(A_n, A)$, per ogni intero n.

Da cui segue che $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$, cioè la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν. □

%

3 Controesempi sulle metriche di Datko

Consideriamo lo spazio di Hilbert separabile l_2 costruito sul campo dei numeri reali, in altre parole:

$$l_2 = \left\{ (t_k)_k \;\middle|\; t_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 < +\infty \right\} \quad .$$

Chiameremo BASE STANDARD di l_2 l'insieme $\{e_n\}_n$ dei vettori:

$$e_n = (\delta_{n,k})_k \quad , \qquad \delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n \end{cases} \quad , \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

È noto che $\{e_n\}_n$ è una base di Schauder per l_2.

Per ogni intero n denotiamo con f_n il funzionale lineare e limitato su l_2 definito da:

$$f_n(x) = f_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k\right) = t_n \quad , \text{per ogni} \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k$$

appartenente ad l_2.

Notiamo che:

$$f_n(e_k) = f_n\left(\sum_{h=1}^{\infty} \delta_{k,h} e_h\right) = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k \neq n \end{cases} \quad ,$$

per ogni k, n in $\mathbb{N}$.

È noto che il duale l_2' di l_2 è isomorfo ad l_2 e

$$l_2' = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k \;\middle|\; r_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \;\text{ e }\; \sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 < \infty \right\} \quad .$$

Pertanto $\{f_n\}$ è una base di Schauder per l_2'.

Ricordiamo infine che per ogni $x' \in l_2'$, $x' = \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k$ con $(r_k)_k \in l_2$ si ha:

$$\|x'\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k \right\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

%

Lemma 3.1.
Sia $X = (X, \|\cdot\|)$ *uno spazio normato sui numeri reali.*

Sia D *un sottoinsieme ovunque denso di* X*.*

Allora l'insieme

$$Y = \left\{ \frac{z}{\|z\|} \;\middle|\; z \in D, z \neq 0 \right\}$$

è un sottoinsieme ovunque denso della sfera unitario S *di* X*.*

Prova

Per ogni y in Y è $y = \dfrac{z}{\|z\|}$, con z in D e $z \neq 0$ e quindi $y \in Y$ e $\|y\| = 1$, cioè $y \in S$.

Così Y è un sottoinsieme della sfera unitaria S di X.

Fissiamo x in S ed $\epsilon > 0$. In corrispondenza ad $x \in X$ e ad $\dfrac{\epsilon}{\epsilon + 2} > 0$ esiste un punto z in D tale che:

$$\|x - z\| < \frac{\epsilon}{\epsilon + 2} \quad .$$

Per una nota disuguaglianza:

$$\Big|1 - \|z\|\Big| = \Big|\|x\| - \|z\|\Big| \leq \|x - z\| < \frac{\epsilon}{\epsilon + 2} \quad .$$

Poiché $0 < \dfrac{\epsilon}{\epsilon + 2} < 1$ si deduce che:

$$\|z\| = 1 - \frac{\epsilon}{\epsilon + 2} > 0 \quad .$$

Perciò $z \in D$, $z \neq 0$ e $y = \dfrac{z}{\|z\|} \in Y$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| x - \frac{z}{\|z\|} \right\| = \frac{\|z - \|z\| \cdot x\|}{\|z\|} \leq \\ &\leq \frac{\|z - x\| + \|x - \|z\| \cdot x\|}{\|z\|} = \frac{\|z - x\| + |1 - \|z\|| \cdot \|x\|}{\|z\|} = \\ &= \frac{\|z - x\| + |1 - \|z\||}{\|z\|} \quad . \end{aligned}$$

Ma $\|z\| > 1 - \dfrac{\epsilon}{\epsilon+2} > 0$ implica che:

$$\frac{1}{\|z\|} < \frac{1}{1-\frac{\epsilon}{\epsilon+2}} = \frac{\epsilon+2}{2} \quad .$$

Inoltre $\|z-x\| < \dfrac{\epsilon}{\epsilon+2}$ e $\Big|1-\|z\|\Big| < \dfrac{\epsilon}{\epsilon+2}$.

Perciò:

$$\begin{aligned}\|x-y\| &\leq \frac{\|z-x\| + |1-\|z\|| \cdot \|x\|}{\|z\|} < \left(\frac{\epsilon}{\epsilon+2} + \frac{\epsilon}{\epsilon+2}\right)\frac{\epsilon+2}{2} = \\ &= \frac{2\epsilon}{\epsilon+2}\frac{\epsilon+2}{2} = \epsilon \quad .\end{aligned}$$

Allora $y \in Y$ e $\|x-y\| < \epsilon$, cioè Y è un sottoinsieme ovunque denso di S e, poiché S è un sottoinsieme chiuso di X, si ha $\overline{Y} = S$. □

%

Teorema 3.2.
Sia

$$S' = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k \;\middle|\; (r_k)_k \in l_2 \;\; e \;\; \left\|\sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k\right\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \right\}$$

la sfera unitaria del duale l_2' di l_2.

Sia Y l'insieme di tutti e soli i funzionali di l_2' che si rappresentano mediante successioni definitivamente nulle di numeri reali, aventi norma unitaria, ovvero:

$$Y = \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \;\middle|\; u_1, ..., u_p \in \mathbb{R} \; ; \; p \in \mathbb{N} \; ; \; \left(\sum_{k=1}^{p} u_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \right\} \quad .$$

Allora esiste un sottoinsieme $\nu = \{x_i'\}_i$ di Y che è denso e numerabile nella sfera unitaria S' di l_2'.

Prova

Sia M l'insieme di tutti i funzionali di l_2' che si rappresentano mediante successioni definitivamente nulle di numeri reali:

$$M = \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \;\middle|\; u_1, ..., u_p \in \mathbb{R} \; , \; p \in \mathbb{N} \right\} \quad .$$

È noto che M e' una varietà lineare, ovunque densa in l'_2, cioè $\overline{M} = l'_2$.

Immediatamente si vede che:

$$Y = \left\{ \frac{z'}{\|z'\|} \;\middle|\; z' \in M \text{ e } z' \neq 0 \right\} \quad .$$

Per il lemma 3.1, Y è un sottoinsieme ovunque denso della sfera unitaria S' di l'_2.

Poiché l'_2 è separabile, Y è anch'esso separabile come sottospazio di X.

Ne segue che esiste un sottoinsieme $\nu = \{x'_i\}_i$ di Y che è numerabile ed ovunque denso in Y.

Perciò Y è un sottoinsieme di S' ovunque denso in S' e ν è un sottoinsieme di Y ovunque denso in Y.

È noto allora che ν è un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso di S'. $\square$

%

Osservazioni 3.3.

(1) *Usando le notazioni del teorema 3.2, per ogni intero i è* $x'_i \in Y \subseteq M$. *Allora esistono* $u_1, ..., u_p \in \mathbb{R}$, *con* $p \in \mathbb{N}$, *tali che*

$$x'_i = \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \quad .$$

Sia

$$H = \left\{ (u_1, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p \;\middle|\; \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \in \nu \;\; e \;\; p \in \mathbb{N} \right\} \quad .$$

Allora:

$$\nu = \left\{ \sum_{k=1}^{p} \;\middle|\; (u_1, ..., u_p) \in H \;\; e \;\; p \in \mathbb{N} \right\}$$

è un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso della sfera unitaria S' *di* l'_2.

∘ ∘ ∘

(2) *D'ora in poi indicheremo con* $X = (X, \| \cdot \|)_c$ *lo spazio di Banach* $l_2 = (l_2, \| \cdot \|)_c$ *sui reali.*

Indicheremo pure con X' *il duale di* l_2 *e con* X'' *il biduale di* l_2.

∘ ∘ ∘

(3) Poniamo

$$\nu = \{x'_i\}_i = \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \;\middle|\; (u_1, ..., u_p) \in H \;\; e \;\; p \in \mathbb{N} \right\} \quad .$$

Allora $\nu = \{x'_i\}_i$ *è un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso della sfera unitaria* S' *di* X'.

D'ora in avanti, fino a nuovo avviso, indicheremo con ν *tale sottoinsieme di* S' *e porremo* $\nu = \{x'_i\}_i$.

%

Teorema 3.4.
Sia $(a_n)_n$ *una successione di numeri reali.*

Sia $A_n = \{a_n e_n\}$, *per ogni intero* n *e* $A = \{0\}$, *dove* 0 *è lo zero di* X.

Allora $(A_n)_n$ *è una successione a valori in* $\overline{co}K(X)$ *ed* A *è un punto di* $\overline{co}K(X)$.

Fissato $\nu = \{x'_i\}_i$, *allora* $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$, *ovvero*

$$\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(a_n e_n)|}{1 + |x'_i(a_n e_n)|} = 0 \quad .$$

Prova

Fissiamo un intero i.

Allora esiste $(u_1, ..., u_p) \in H$ con $p \in \mathbb{N}$ tale che:

$$x'_i = \sum_{k=1}^{p} u_k f_k \quad .$$

Sia $k = 1, ..., p$.

Sia $f_k : X \to \mathbb{R}$ il funzionale lineare definito da

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{h=1}^{\infty} t_h e_h\right) = t_k \text{ , per ogni } x = \sum_{h=1}^{\infty} t_h e_h$$

appartenente ad X.

Fissiamo un intero $n > p$.

Allora $a_n e_n = \sum\limits_{h=1}^{\infty} a_n \delta_{n,h} e_h$.
Perciò, dato che $a_n e_n \in X$:

$$f_k(a_n e_n) = f_k\left(\sum_{h=1}^{\infty} a_n \delta_{n,h} e_h\right) = a_n \delta_{n,k} \quad .$$

Ma dato che $n > p \geq k \geq 1$ si ha che $\delta_{n,k} = 0$, cioè:

$$f_k(a_m e_n) = a_n \delta_{n,k} = 0 \quad , \text{per} \quad n = p+1, p+2, ... \quad \text{e}$$

$k = 1, 2, ..., p$.

Pertanto si ha:

$$x'_i(a_n e_n) = \sum_{k=1}^{p} u_k f_k(a_n e_n) = 0 \quad , \text{per} \quad n = p+1, p+2, ... \quad .$$

Così $\lim\limits_n x'_i(a_n e_n) = 0$ per ogni $i = 1, 2, ...$.
Allora $(A_n)_n$ è una successione di $\overline{co}K(X)$ ed A è un punto di $\overline{co}K(X)$, per i quali:

$$\lim_n |x'_i(A_n) - x'_i(A)| = \lim_n |x'_i(a_n e_n) - x'_i(0)| = 0$$

per ogni $i = 1, 2, ...$.

Pertanto, per la parte sufficiente del teorema 2.12, risulta:

$$(+) \qquad \lim_n d_\nu(A_n, A) = 0 \ ,$$

cioè la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν.

Siano ora i e n due numeri naturali fissati.
Allora

$$\frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} = \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(a_n e_n)|}{1 + |x'_i(a_n e_n)|}$$

Pertanto per ogni $n = 1, 2, ...$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(a_n e_n)|}{1 + |x'_i(a_n e_n)|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(A_n) - x'_i(A)|}{1 + |x'_i(A_n) - x'_i(A)|} = d_\nu(A_n, A) \quad .$$

Allora dalla (+) segue:

$$\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x'_i(a_n e_n)|}{1+|x'_i(a_n e_n)|} = \lim_n d_\nu(A_n, A) = 0 \quad .$$

□

%

Corollario 3.5.
Sia $A_n = \{e_n\}$, per ogni intero n e $A = \{0\}$, dove 0 è lo zero di X.

Allora $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d, cioè

$$\lim_n d(A_n, A) = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(e_n)| = 0 \ .$$

Prova

Per il teorema 3.4 la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν, ovvero:

$$\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0 \ .$$

Inoltre:

$$\|A_n\| = \|e_n\| = 1 \ , \text{ per ogni } n = 1, 2, \dots \quad .$$

Allora $(A_n)_n$ è una successione in $\overline{co}K(X)$, uniformemente limitata, che converge ad $A \in \overline{co}K(X)$, nella metrica d_ν.

Quindi dalla parte necessaria del teorema 2.17, segue che la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d, cioè:

$$\lim_n d(A_n, A) = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(e_n)| = 0 \ .$$

□

%

Presentiamo ora due esempi, nel caso infinito dimensionale, che evidenziano come nel corollario 2.11 le due inclusioni provate fra le topologie τ_ν, τ_d, τ_h, valgano generalmente in senso stretto.

%

Esempio 3.6.
Costruiamo qui una successione $(A_n)_n$ di elementi di $\overline{co}K(X)$ tale che $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$, per qualche $A \in \overline{co}K(X)$, che non converge ad A nella metrica d.

In virtù del teorema di Hahn-Banach, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un numero intero j tale $x'_i(e_n) \neq 0$.

Allora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(e_n)| > 0 \text{ , per ogni } n = 1, 2, ... \quad .$$

Così possiamo definire

$$a_n = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(e_n)|}$$

per ogni $n = 1, 2, ...$, ovvero una successione di numeri reali positivi $(a_n)_n$.

Poniamo

$$A_n = \{a_n e_n\} \text{ , per ogni } n = 1, 2, ... \quad ,$$

$$A = \{0\} \quad .$$

Per il teorema 3.4 si ha:

$$\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0 \ ,$$

cioè la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν.

Fissiamo ora un numero naturale n. Allora

$$d(A_n, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(A_n) - x'_i(A)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(a_n e_n)| =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} a_n |x'_i(e_n)| = a_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x'_i(e_n)| = 1 \ .$$

Allora la successione $(A_n)_n$ non converge ad A nella metrica d.

Dalla parte necessaria del teorema 1.2 e in virtù del corollario 2.11 risulta:

$$\tau_\nu \subsetneq \tau_d \ .$$

%

Esempio 3.7.
Definiamo una successione $(A_n)_n$ a valori in $\overline{co}K(X)$, uniformemente limitata, che converge nella metrica d a qualche A in $\overline{co}K(X)$, ma non converge ad A nella metrica h.

Poniamo

$$A_n = \{a_n e_n\} \text{ , per ogni } n = 1, 2, ... \quad ,$$
$$A = \{0\} \quad .$$

Per il corollario 3.5, la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d, cioè:

$$\lim_n d(A_n, A) = 0 \ .$$

Inoltre nel medesimo corollario abbiamo provato che la successione $(A_n)_n$, a valori in $\overline{co}K(X)$, è uniformemente limitata.

Fissiamo un numero naturale n. Allora

$$\rho(A_n, A) = \sup_{x \in A_n} \inf_{y \in A} \|x - y\| = \|e_n\| = 1 \ ,$$

$$\rho(A, A_n) = \sup_{y \in A} \inf_{x \in A_n} \|x - y\| = \|e_n\| = 1 \ .$$

Pertanto:

$$h(A_n, A) = \max\{\rho(A_n, A), \rho(A, A_n)\} = 1 \ ,$$

per ogni $n = 1, 2, ...$, ovvero $(A_n)_n$ non converge ad A nella metrica h.

Per la parte necessaria del teorema 1.2 e in virtù del corollario 2.11 si ha:

$$\tau_d \subsetneqq \tau_h \ .$$

%

Per ragioni di comodità diamo ora l'esempio di una una successione $(A_n)_n$ in $\overline{co}K(X)$, che converge nella metrica d, ma non è uniformemente limitata secondo la definizione 2.15.

In altre parole nel teorema 2.16 la condizione (1) è necessaria $\Big[$cfr. corollario 2.13$\Big]$, mentre la condizione (2) è solo sufficiente, per la d-convergenza.

%

Esempio 3.8.
Come osservato nell'esempio 3.6 per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(e_n)| > 0 \ .$$

Allora $(a_n)_n$ è una successione di numeri reali positivi che, in virtù del corollario 3.5, converge a zero.

Poniamo $b_n = |\log a_n|$, per ogni $n = 1, 2, ...$.
Allora $(b_n)_n$ è una successione, non limitata, di numeri reali positivi, tale che:

$$\lim_n a_n b_n = 0 \ .$$

Poniamo

$$A_n = \{b_n e_n\} \ \text{, per ogni } n = 1, 2, ... \ ,$$
$$A = \{0\} \quad .$$

Per ogni $n = 1, 2, ...$ vale

$$d(A_n, A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |b_n x_i'(e_n)| =$$
$$= b_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i'(e_n)| = a_n b_n \ .$$

Da cui: $\lim_n d(A_n, A) = \lim_n a_n b_n = 0$, pertanto la successione $(A_n)_n$ è d-convergente.

Però: $\|A_n\| = \|b_n e_n\| = b_n$, per ogni $n = 1, 2, ...$, in altre parole la successione $(A_n)_n$ converge ad $A \in cohX$ nella metrica d, ma non e' uniformemente limitata.

%

Desideriamo mettere in evidenza che, se consideriamo due distinti insiemi ν, ν_1 numerabili ed ovunque densi in S', allora le corrispondenti metriche d_ν, d_{ν_1} non risultano, in generale, equivalenti.

%

Esempio 3.9.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo
$$r_k = 2^{-\frac{k}{2}} \ .$$
Allora
$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \ < +\infty \ .$$
Perciò, posto $x' = \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k$, risulta ovviamente $x' \in X'$ e:
$$\|x'\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad , \quad \text{cioè} \ \ x' \in S' \ .$$
Pertanto, tenuto conto anche dell'osservazione 3.3, x' non è un elemento di ν.

Definiamo dunque $\nu_1 = \{y_i'\}_i$ come segue:
$$y_i' = \begin{cases} x', & \text{se } i = 1 \\ x_{i-1}', & \text{se } i = 2, 3, ... \end{cases} \ .$$

Così $\nu \subsetneqq \nu_1$ e $\overline{\nu_1} = S'$, ovvero ν_1 è un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso di S', che contiene propriamente ν.
Pertanto le due metriche corrispondenti d_ν, d_{ν_1}, definite su $\overline{co}K(X)$, stanno nella seguente relazione:
$$d_{\nu_1}(A,B) \leq \frac{1}{2} \ \frac{|x'(A) - x'(B)|}{1 + |x'(A) - x'(B)|} \ + \ d_\nu(A,B) \quad \text{e}$$
$$\frac{1}{2} \ \frac{|x'(A) - x'(B)|}{1 + |x'(A) - x'(B)|} \quad \leq \quad d_{\nu_1}(A,B) \quad ,$$
per ogni $A, B \in \overline{co}K(X)$.

Poniamo $a_n = \frac{1}{r_n}$, per ogni $n = 1, 2, ...$.

Poniamo ancora:
$$A_n = \{a_n e_n\} \, , \, \text{per ogni } n = 1, 2, ... \ \ ,$$
$$A = \{0\} \quad .$$

In virtù del teorema 3.4, la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica d_ν, cioè:

$$\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0 \ .$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$\begin{aligned} x'(a_n e_n) &= \sum_{k=1}^{\infty} r_k f_k(a_n e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k a_k f_k(e_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} r_k a_k \delta_{n,k} = r_n a_n = 1 \quad . \end{aligned}$$

Perciò $x'(a_n e_n) = 1$, ovvero $x'(A_n) = 1$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

Così risulta:

$$\frac{1}{2} \ \frac{|x'(A) - x'(B)|}{1 + |x'(A) - x'(B)|} \ = \ \frac{1}{4}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} \ \frac{|x'(A_n) - x'(A)|}{1 + |x'(A_n) - x'(A)|} \leq d_{\nu_1}(A_n, A) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \ \frac{|x'(A_n) - x'(A)|}{1 + |x'(A_n) - x'(A)|} \ + \ d_\nu(A_n, A) = \\ &= \frac{1}{4} \ + d_\nu(A_n, A) \end{aligned}$$

per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

Poiché $\lim_n d_\nu(A_n, A) = 0$ abbiamo che $\lim_n d_{\nu_1}(A_n, A) = \frac{1}{4}$.

In conclusione la successione $(A_n)_n$, a valori in $\overline{co}K(X)$, converge nella metrica d_ν ad A in $\overline{co}K(X)$, ma non converge ad A nella metrica d_{ν_1}.

Allora in virtù del teorema 1.2, risulta:

$$\tau_\nu \neq \tau_{\nu_1} \quad .$$

%

ooooooooooooooooooo

Capitolo 2

Funzionali sublineari e funzioni supporto

1 Funzionali convessi e funzionali sublineari

Indicheremo con $E = (E, \|\cdot\|)$ uno spazio normato sul campo dei numeri reali, e con $E' = (E', \|\cdot\|)$ il suo duale topologico.

∘ ∘ ∘

Per quanto riguarda il calcolo aritmetico con coinvolge $+\infty$ e $-\infty$ adotteremo le regole:

$a + \infty = \infty + a = \infty$, per $-\infty < a \leq +\infty$;
$a - \infty = -\infty + a = -\infty$, per $-\infty \leq a < \infty$;
$a\,\infty = \infty\,a = \infty$, $a(-\infty) = (-\infty)a = -\infty$, per $0 < a \leq \infty$;
$a\,\infty = \infty\,a = -\infty$, $a(-\infty) = (-\infty)a = \infty$, per $-\infty \leq a < 0$;
$0\,\infty = \infty\,0 = 0(-\infty) = (-\infty)0 = 0$, $-(-\infty) = \infty$.

Adottando queste regole, a condizione di evitare le espressioni $\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$, sono valide le familiari leggi dell'aritmetica.

∘ ∘ ∘

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{R}_\infty$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

%

Definizioni 1.1.

(1) *Diremo che un'applicazione $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ è un* *<u>FUNZIONALE SUBLINEARE</u> se soddisfa alle condizioni:*

- (i) *$p(ax) = ap(x)$, per ogni punto x di E e per ogni numero reale positivo a, cioè p è un* *<u>FUNZIONALE POSITIVAMENTE OMOGENEO</u>;*
- (ii) *$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, per ogni x, y in E, cioè p è un* *<u>FUNZIONALE SUBADDITIVO</u>.*

∘ ∘ ∘

(2) *Diremo che un'applicazione $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ è <u>CONVESSA</u> se*

$$p((1-a)x + ay) \leq (1-a)p(x) + ap(y)$$

per ogni x, y in E e per ogni a in $[0, 1]$.

◦ ◦ ◦

Non è difficile provare, e per ragioni di spazio ne omettiamo la dimostrazione, che un funzionale $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ è sublineare se e solo se è positivamente omogeneo e convesso.

%

Definizione 1.2.
Diremo <u>*DOMINIO EFFETTIVO*</u> *di una applicazione* $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *il sottoinsieme* $\operatorname{dom} p$ *di* E *definito da:*

$$\operatorname{dom} p = \Big\{ x \in E \mid p(x) < +\infty \Big\}$$

◦ ◦ ◦

Ovviamente se p è un'applicazione convessa il suo dominio effettivo è un sottoinsieme convesso di E.

%

Osservazione 1.3.
Considereremo nel seguito lo spazio lineare prodotto $E \times \mathbb{R}$ *munito della norma:*

$$\|(x, r)\| = \max \Big\{ \|x\|, |r| \Big\} \ , \quad \textit{per ogni } (x, r) \in E \times \mathbb{R} \ .$$

A meno di isomorfismi $(E \times \mathbb{R})'$ *coincide con* $E' \times \mathbb{R}$.

%

Definizione 1.4.
Diremo <u>*EPIGRAFO*</u> *di un'applicazione* $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *il sottoinsieme* $\operatorname{epi} p$ *di* $E \times \mathbb{R}$ *definito da:*

$$\operatorname{epi} p = \Big\{ (x, r) \in E \times \mathbb{R} \ \Big| \ p(x) \le r \Big\}$$

◦ ◦ ◦

Osserviamo che un punto x di E appartiene al dominio effettivo di p se e solo se esiste almeno un numero reale r tale che la coppia (x, r) è un punto dell'epigrafo di p.

◦ ◦ ◦

È noto che un'applicazione $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ è convessa se e solo se il suo epigrafo è un sottoinsieme convesso dello spazio normato $E \times \mathbb{R}$.

%

Definizione 1.5.
Diremo che un'applicazione $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *è SEMICONTINUA INFERIORMENTE* $\{s.c.i\}$ *nel punto* x_0 *di* E, *se per ogni numero reale* $u < p(x_0)$ *esiste un numero reale* $\delta(x_0, u) > 0$, *tale che:* $x \in E$ *con* $\|x - x_0\| < \delta$ *implica* $p(x) > u$.

Diremo semplicemente che p *è SEMICONTINUA INFERIORMENTE* $\{s.c.i\}$ *se* p *è semicontinua inferiormente in ogni punto di* E.

%

Teorema 1.6.
Sia $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *un'applicazione.*

Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *p è semicontinua inferiormente;*

(ii) *per ogni punto x_0 di E e per ogni successione $(x_n)_n$ in E convergente ad x_0 si ha*
$$p(x_0) \leq \operatorname*{minlim}_n p(x_n) \ ;$$

(iii) *l'epigrafo* $\operatorname{epi} p$ *di p è un sottoinsieme chiuso dello spazio normato $E \times \mathbb{R}$.*

Prova

L'equivalenza tra (i) e (ii) è ovvia come l'implicazione $(ii) \implies (iii)$ e l'implicazione $(iii) \implies (i)$. $\square$

%

Definizione 1.7.
Diremo che un'applicazione $f : E \to \mathbb{R}$ *è* *<u>AFFINE</u>* *se:*

$$f((1-a)x + ay) = (1-a)f(x) + af(y)$$

per ogni x, y *in* E *e per ogni* a *in* $\mathbb{R}$.

%

Definizione 1.8.
Indicheremo con $A(E)$ *la famiglia di tutte le funzioni continue ed affini definite su* E*, cioè:*

$$A(E) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ è continua ed affine} \right\} \quad .$$

∘ ∘ ∘

Notiamo che

$$A(E) = \left\{ x' + c \,\middle|\, x' \in E' \text{ e } c \in \mathbb{R} \right\}$$

e quindi $A(R)$ è evidentemente chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare, puntuali.

%

Definizione 1.9.
Sia $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *un'applicazione.*

Denotiamo con $M(E, p)$ *la famiglia di tutte le funzioni continue ed affini definite su* E*, che sono minori o uguali di* p*, cioè:*

$$M(E, p) = \left\{ f \in A(E) \,\middle|\, f \le p \right\} \quad ,$$

dove con $f \le p$ *intendiamo che* $f(x) \le p(x)$ *per ogni punto* x *di* E.

%

Teorema 1.10 (Castaing-Valadier [7])**.**
Sia $p : E \to \mathbb{R}_\infty$ *un'applicazione convessa e semicontinua inferiormente.*

Allora:

$$p(x) = \sup_{f \in M(E,p)} f(x) \quad \text{, per ogni } x \text{ in } E \text{ .}$$

Prova

Se $\operatorname{dom} p = \emptyset$, l'affermazione è ovvia.

Sia dunque $x_0 \in \operatorname{dom} p$.

Dividiamo la dimostrazione in tre parti.

<u>Passo</u> 1

Proviamo qui che $M(E, p) \neq \emptyset$.

Fissiamo $r_0 \in \mathbb{R}$ con $r_0 < p(x_0)$.

Dalla convessità di p discende che $\operatorname{epi} p = co \operatorname{epi} p$ e quindi per la semicontinuità inferiore risulta che $\operatorname{epi} p = \overline{co} \operatorname{epi} p$.

Per costruzione $(x_0, r_0) \notin \operatorname{epi} p$.

Pertanto, per il Teorema V.2.10 di Dunford-Schwartz [13], esistono un numero reale a, un numero reale t_0 e un funzionale lineare e limitato $x_0' \in E'$ tali che:

$$x_0'(x_0) + t_0 r_0 < a \leq x_0'(x) + t_0 r$$

per ogni (x, r) in $\operatorname{epi} p$.

Poiché $(x_0, p(x_0)) \in \operatorname{epi} p$, risulta:

$$x_0'(x_0) + t_0 r_0 < a \leq x_0'(x_0) + t_0 p(x_0) \ ,$$

e quindi:

$$t_0 r_0 < t_0 p(x_0) \ .$$

Per costruzione $r_0 < p(x_0)$ e quindi risulta $t_0 > 0$.

Poiché:

$$x_0'(x) + t_0 p(x_0) \geq a \ , \ \text{ per ogni } x \text{ in } E$$

e $t_0 > 0$, si ha:

$$p(x) \geq \frac{1}{t_0} \Big[- x_0'(x) + a \Big] \ , \ \text{ per ogni } x \text{ in } E \ .$$

Allora $f_0 = -\frac{1}{t_0} x_0' + \frac{a}{t_0}$ è una funzione continua tale che:

$$f_0(x) \leq p(x) \ , \ \text{ per ogni } x \text{ in } E \ .$$

Resta perciò provato l'asserto del passo 1.

Passo 2

Proviamo che comunque si fissi un punto x di E e per ogni numero reale $r < p(x)$ esiste una applicazione f in $M(E,p)$ tale che $r < f(x)$.

Sia x un punto di E e fissiamo un numero reale $r < p(x)$.

Allora $(x,r) \notin \operatorname{epi} p$.

Ancora per il Teorema V.2.10 di Dunford-Schwartz esistono un numero reale b, un numero reale t e un funzionale lineare e limitato $x' \in E'$ tali che:

$$x'(x) + tr < b \leq x'(y) + ts$$

per ogni (y,s) in $\operatorname{epi} p$.

Supponiamo, per assurdo, che $t < 0$. Allora per ogni $s \in \mathbb{R}$, $s \geq p(x_0)$, date che $(x0, s) \in \operatorname{epi} p$, risulta:

$$x'(x) + tr < x'(x_0) + ts \ ,$$

e, per la linearità di x':

$$x'(x - x_0) < t(s - r) \ , \text{ per ogni } \ s \in [p(x_0), +\infty[\ .$$

Fissiamo $s \in [p(x_0), +\infty[$ con $s > \frac{x'(x-x_0)}{t} + r$.

Allora, date che $t < 0$, risulta:

$$t(s - r) < x'(x - x_0) < t(s - r)$$

che evidentemente è un assurdo.

Perciò è: $t \geq 0$.

Consideriamo dapprima il caso in cui $t > 0$.
Allora da:

$$x'(x) + tr < b \leq x'(y) + ts$$

per ogni (y,s) in $\operatorname{epi} p$, si deduce che:

$$x'(y) + tp(y) \geq b \ , \text{ per ogni } y \text{ in } E \ .$$

Dato che $t > 0$, risulta:

$$p(y) \geq \frac{1}{t}\Big[-x'(y)+b\Big] \text{ , per ogni } y \text{ in } E \text{ .}$$

Allora $f = -\frac{1}{t}x' + \frac{b}{t}$ è una funzione continua ed affine tale che:

$$f(y) \leq p(y) \text{ , per ogni } y \text{ in } E \text{ .}$$

Infine da $x'(x) + tr < b$ discende che:

$$f(x) = -\frac{1}{t}x'(x) + \frac{b}{t} > r$$

e quindi l'asserto.

Consideriamo ora il caso in cui $t = 0$.

Sia $y \in \operatorname{dom} p$. Allora $p(y) \in \mathbb{R}$ e quindi $(y, p(y)) \in \operatorname{epi} p$. Ne consegue:

$$x'(x) < b \leq x'(y) \text{ .}$$

Allora per ogni $y \in \operatorname{dom} p$ è: $x'(x) < b \leq x'(y)$. È evidente allora che $x \notin \operatorname{dom} p$, cioè $p(x) = +\infty$.

Sia $k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$.

L'applicazione $f : E \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(y) = f_0(y) + k\Big[b - x'(y)\Big] \text{ , per ogni } \ y \in E$$

(dove f_0 è definita nel passo 1) è continua ed affine.

Se y è in E e $y \notin \operatorname{dom} p$ allora $p(y) = +\infty \geq f(x)$. Sia allora $y \in \operatorname{dom} p$.
Ne segue che:

$$x'(x) < b \leq x'(y) \text{ .}$$

Allora risulta $b - x'(y) \leq 0$, e poiché $k \geq 0$, è

$$k\Big[b - x'(y)\Big] \leq 0 \ .$$

Quindi:

$$f(y) = f_0(y) + k\Big[b - x'(y)\Big] \leq p(y) \ .$$

in quanto $f_0(y) \leq p(y)$.

Perciò $f(y) \leq p(y)$, per ogni y in E, cioè $f \in M(E, p)$.

Dato che $x'(x) < b$, risulta: $b - x'(x) > 0$.

Possiamo allora fissare $k \in \mathbb{R}_0^+$ con:

$$k > \frac{r - f_0(x)}{b - x'(x)}$$

e risulta:

$$f(x) = f_0(x) + k\Big[b - x'(x)\Big] > r \ .$$

Abbiamo così provato quanto asserito nel passo 2.

<u>Passo</u> 3

Proviamo finalmente l'asserto.

Nel passo 1 abbiamo provato che $M(E, p) \neq \emptyset$. Allora l'applicazione $q : E \to \mathbb{R}_\infty$, definita da

$$q(x) = \sup_{f \in M(E,p)} f(x) \quad \text{, per ogni } x \ \text{ in } E$$

è ben posta.

Inoltre, per la definizione 1.9 è:

$$q(x) = \sup_{f \in M(E,p)} f(x) \leq p(x) \quad \text{, per ogni } x \ \text{ in } E \ .$$

Supponiamo, per assurdo, he esista un punto x_1 di E tale che:

$$q(x_1) < p(x_1) \ .$$

Allora $r_1 = q(x_1) \in \mathbb{R}$ e $r_1 < p(x_1)$.

Per quanto provato nel passo 2 esiste una funzione $f \in M(E,p)$ tale che: $r_1 < f(x_1)$.

Ma allora, $q(x_1) < f(x_1) \leq q(x_1)$ e questo e' un assurdo.

Ne segue pertanto che:

$$p(x) = q(x) = \sup_{f \in M(E,p)} f(x) \quad , \text{per ogni } x \ \text{ in } E \ ,$$

come volevamo. $\square$

%

2 Proprietà dei funzionali sublineari a valori reali

In questo paragrafo considereremo solamente funzionali definiti sullo spazio normato $E = (E, \| \cdot \|)$ e a valori reali.

%

Definizione 2.1.
Sia $p : E \to \mathbb{R}$ un funzionale positivamente omogeneo, a valori reali, definito sullo spazio normato E che, anche nel seguito, supporremo non sia ridotto all'elemento nullo.

Chiameremo <u>NORMA</u> del funzionale p il numero reale esteso, non negativo, definito da:

$$\|p\| = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{|p(x)|}{\|x\|} \ .$$

D'ora in avanti sottointenderemo la notazione $x \in E$ nell'estremo superiore che definisce la norma di p.

Notiamo che:

$$\|p\| = \min \left\{ M \in \tilde{\mathbb{R}}_0^+ \ \middle| \ |p(x)| \leq M\|x\| \ , \ \ \textit{per ogni} \ \ x \in E \right\}$$

e in particolare:

$$|p(x)| \leq \|p\|\|x\| \ , \textit{per ogni } x \textit{ in } E \ .$$

Inoltre valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\|p\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|p(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |p(x)| =$$
$$= \sup_{\|x\| \leq 1} |p(x)| = \sup_{0 < \|x\| \leq 1} \frac{p(x)}{\|x\|} \ .$$

%

Definizione 2.2.
Diremo che un funzionale positivamente omogeneo $p : E \to \mathbb{R}$ è <u>LIMITATO</u> se esiste un numero reale $M \geq 0$ tale che:

$$|p(x)| \leq M\|x\| \ , \textit{per ogni } x \textit{ in } E \ .$$

Pertanto p è limitato se e solo se possiede norma finita.

%

Lemma 2.3.
Sia $p : E \to \mathbb{R}$ un funzionale sublineare e sia M un numero reale non negativo.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\|p\| \leq M$ è che si verifichi:

$$p(x) \leq M\|x\| \text{ , per ogni } x \text{ in } E \text{ .}$$

Prova

La parte necessaria è ovvia.

Proviamo la parte sufficiente.
Sia $p(x) \leq M\|x\|$ per ogni $x \in E$.

Dalla positiva omegeneità di e dal fatto che $p(E) \subseteq \mathbb{R}$ discende che $p(0) = 0$.

Fissiamo $x \in E$.
Allora per la subadditività di p, risulta:

$$0 = p(x - x) \leq p(x) + p(-x) \text{ , cioè}$$

$$-p(-x) \leq p(x) \text{ .}$$

Dall'ipotesi discende che:

$$p(-x) \leq M\| - x\| = M\|x\| \text{ , cioè}$$

$$-M\|x\| \leq -p(-x) \leq p(x) \leq M\|x\| \text{ ,}$$

ovvero $\|p\| \leq M$. □

%

Teorema 2.4.
Sia $p : E \to \mathbb{R}$ un funzionale sublineare.

Condizione necessaria e sufficiente affinché p sia continuo su E è che p sia limitato.

Prova

La dimostrazione della parte necessaria è identica a quella per i funzionali lineari, in quanto si utilizza in essa solo la positiva omegeneità.

La prova della parte sufficiente del teorema è analoga a quella per i funzionali lineari, ma in essa si sfrutta solo la subadditività di p. □

%

Osservazione 2.5.
Per quanto rilevato nel teorema precedente, in effetti, un funzionale sublineare $p : E \to \mathbb{R}$ è limitato se e solo è uniformemente continuo su E e inoltre:

"Un funzionale positivamente omogeneo e continuo $p : E \to \mathbb{R}$ è limitato."

Ma, viceversa, in generale, non è detto che un funzionale positivamente omogeneo e limitato $p : E \to \mathbb{R}$ sia continuo.

Un esempio, a tale proposito, è fornito dall'applicazione $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da:

$$p(x, y) = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ y, & se\ x < 0 \end{cases}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

%

Teorema 2.6.
Sia E uno spazio di Banach.

Supponiamo che $\{p_\alpha\}_{\alpha \in J}$ sia una famiglia non vuota di funzionali $p_\alpha : E \to \mathbb{R}$, $\alpha \in J$ sublineari e limitati.

Supponiamo inoltre che per ogni punto x di E esista un numero reale non negativo M_x tale che:

$$p_\alpha(x) \leq M_x \text{ , per ogni } \alpha \in J \text{ .}$$

Allora esiste un numero reale non negativo M tale che:

$$\|p_\alpha\| \leq M \text{ , per ogni } \alpha \in J \text{ .}$$

Prova

Sia k un numero naturale fissato.

Definiamo il sottoinsieme A_k di E come segue:

$$A_k = \Big\{ x \in E \mid p_\alpha(x) \le k \text{ e } p_\alpha(-x) \le k \text{ per ogni } \alpha \in J \Big\} \ .$$

Sia x in $\overline{A_k}$.
Allora esiste una successione $(x_n)_n$ di punti di A_k che converge ad x in E.

Per la parte sufficiente del teorema 2.4, p è continuo su E, e quindi si hanno:

$$p_\alpha(x) = \lim_n p_\alpha(x_n) \ \ ; \ \ p_\alpha(-x) = lim_n p_\alpha(-x_n) \ ,$$

per ogni α in J.

Per ogni $n = 1, 2, ...$ è x_n in A_k e quindi:

$$p_\alpha(x_n) \le k \quad \text{ e } \quad p_\alpha(-x_n) \le k \text{ , per ogni } \alpha \in J \ .$$

Pertanto, per ogni $\alpha \in J$, valgono:

$$p_\alpha(x) = lim_n p_\alpha(x_n) \le k \quad \text{ e } \quad p_\alpha(-x) = lim_n p_\alpha(-x_n) \le k \ ,$$

cioè x appartiene ad A_k.

Abbiamo provato che A_k è un sottoinsieme chiuso di E, per ogni $k = 1, 2, ...$.

Fissiamo ora un punto x di E.
Per ipotesi esistono due numeri reali non negativi M_x e M_{-x} tali che:

$$p_\alpha(x) \le M_x \quad \text{ e } \quad p_\alpha(-x) \le M_{-x} \ ,$$

per ogni α in J.

Ovviamente esiste un intero $\overline{k}$ tale che:

$$p_\alpha(x) \le \overline{k} \quad \text{ e } \quad p_\alpha(-x) \le \overline{k} \quad \text{, per ogni } \alpha \in J \ ,$$

cioè $x \in A_{\overline{k}}$, ovvero $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

Dato che E è uno spazio di Banach, per il Teorema di Categoria di Baire (vedi Toerema I.6.9 Dunford-Schwartz [13]) esiste un intero k_0 tale che A_{k_0} ha interno non vuoto in E.

Perciò esistono x_0 in A_{k_0} ed $r > 0$ tali che la boccia aperta $B(x_0, r_0)$ centrata in x_0 e di raggio r, è contenuta in A_{k_0} .

Fissiamo x in E e, senza perdita di generalità, supponiamo $x \neq 0$.
Poniamo $z = x_0 + ax$, dove $a = r/2\|x\| > 0$.

Allora:

$$\|z - x_0\| = a\|x\| = r/2 < r$$

e così z è un punto di $B(x_0, r)$.

Perciò $z \in A_{k_0}$.

Sia α fissato in J.

Allora, poiché x_0 e z sono in A_{k_0}, risultano:

$$p_\alpha(x_0) \leq k_0 \quad \text{e} \quad p_\alpha(-x_0) \leq k_0 \ ,$$

$$p_\alpha(z) \leq k_0 \quad \text{e} \quad p_\alpha(-z) \leq k_0 \ .$$

Per la sublinearità di p_α risulta:

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{a} p_\alpha(z - x_0) \leq \frac{1}{a}\Big[p_\alpha(z) + p_\alpha(-x_0)\Big] \leq \frac{1}{a} 2k_0 = \frac{4k_0}{r}\|x\| \ .$$

Visto che $p_\alpha(0) = 0$, per l'arbitrarietà di $x \in E$, posto $M = \frac{4k_0}{r} > 0$, risulta:

$$p_\alpha(x) \leq M\|x\| \ , \text{ per ogni } x \text{ in } E \ .$$

Dato che p_α è sublineare, per il lemma 2.3, deduciamo che:

$$\|p_\alpha\| \leq M \ .$$

Per l'arbitrarietà di $\alpha \in J$ otteniamo:

$$\|p_\alpha\| \leq M \ , \text{ per ogni } \alpha \in J \ ,$$

cioè l'asserto. $\square$

3 Funzioni supporto

In questo paragrafo daremo alcuni risultati fondamentali relativi alle funzioni supporto, che sono state introdotte nelle definizioni 2.1 del Capitolo 1.

◦ ◦ ◦

Torneremo ad indicare con X lo spazio di Banach $X = (X, \|\cdot\|)$, che, ricordiamo, è supposto separabile e riflessivo.

In questo paragrafo considereremo funzionali sublineari definiti sullo spazio di Banach $E = X'$, duale topologico di X.

%

Lemma 3.1.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X e sia $s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R}_\infty$ la funzione supporto di A.

Allora $s(\cdot, A)$ è un funzionale sublineare semicontinuo inferiormente su X'.

Prova

Nel Teorema 2.2 del Capitolo 1 abbiamo provate che:

$$s(x' + y', A) \leq s(x', A) + s(y', A)$$

$$s(ax', A) = as(x', A)$$

per ogni $x', y' \in X'$ e per ogni $a \in \mathbb{R}_0^+$.

Quindi la funzione supporto di A,

$$s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R}_\infty$$

$$s(x', A) = \sup_{x \in A} x'(x) \quad , \quad x' \in X'$$

è un funzionale sublineare.

Sia ora x'_0 un fissato punto di X' e sia $(x'_n)_n$ una successione a valori in X' che converge ad x'_0, ovvero $\lim_n \|x'_n - x'_0\| = 0$.

Fissiamo un numero reale $u < s(x'_0, A)$.

Allora $u < \sup_{x \in A} x'_0(x)$ e quindi esiste un punto x_0 appartenente ad A tale che: $u < x'_0(x_0)$.

Pertanto:

$$u < x_0'(x_0) = \lim_n x_n'(x_0) \leq \min\lim_n s(x_n', A) \quad .$$

Dall'arbitrarietà di $u < s(x_0', A)$ discende che:

$$s(x_0', A) \leq \min\lim_n s(x_n', A) \quad ,$$

cioè, per il teorema 1.6, abbiamo dimostrato che $s(\cdot, A)$ è un funzionale sublineare semicontinuo inferiormente.

□

%

Proposizione 3.2.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X. Allora valgono le uguaglianze:

$$\|A\| = \sup_{x' \in S'} |s(x', A)| = \sup_{x' \in S'} s(x', A) \quad .$$

Prova

Fissiamo un punto x' di S'.

Allora risulta:

$$|s(x', A)| = |\sup_{x \in A} x'(x)| \leq \sup_{x \in A} |x'(x)| \leq \sup_{x \in A} \|x'\| \|x\| = \sup_{x \in A} \|x\| = \|A\| \ .$$

Perciò: $\sup_{x' \in S'} |s(x', A)| \leq \|A\|$.

Per una conseguenza del Teorema di Hahn-Banach e per il lemma 1.1 del Capitolo 1, risulta:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \sup_{x' \in S'} x'(x) = \\ &= \sup_{x' \in S'} \sup_{x \in A} x'(x) = \sup_{x' \in S'} s(x', A) \leq \sup_{x' \in S'} |s(x', A)| \leq \|A\| \ . \end{aligned}$$

Perciò:

$$\|A\| = \sup_{x' \in S'} |s(x', A)| = \sup_{x' \in S'} s(x', A) \ .$$

□

%

Lemma 3.3.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X.

Condizione necessaria e sufficiente affinché A sia limitato è che la funzione supporto $s(\cdot, A)$ di A sia un funzionale sublineare e limitato.

In tal caso: $\|s(\cdot, A)\| = \|A\|$

Prova

Per il lemma 3.1 la funzione supporto di A è un funzionale sublineare.

Parte necessaria
Supponiamo che A sia limitato, cioè che $\|A\| < +\infty$.

Per la parte (iii) del teorema 2.2 del Capitolo 1, risulta:

$$|s(x', A)| \leq \|A\| \|x'\| < +\infty \ , \ \text{ per ogni } x' \text{ in } X' \ .$$

Quindi $s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R}$ è un funzionale sublineare e limitato.

Parte sufficiente
Supponiamo che $s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R}$ sia un funzionale sublineare e limitato.
Allora esiste un numero reale $M \geq 0$ tale che:

$$|s(x', A)| \leq M \ , \ \text{ per ogni } x' \text{ in } S' \ .$$

Ne segue che per la proposizione 3.2 ,

$$\|A\| = \sup_{x' \in S'} |s(x', A)| \leq M < +\infty \quad ,$$

cioè A è limitato.

Dalla definizione 2.1 di questo capitolo si deduce che:

$$\|s(\cdot, A)\| = \sup_{\|x'\|=1} |s(x', A)| = \|A\| \quad ,$$

e quindi il lemma è completamente provato. $\square$

%

Teorema 3.4.
Siano A, B due sottoinsiemi chiusi, convessi, non vuoti di X.

Se $s(x', A) = s(x', B)$, per ogni $x' \in X'$, allora $A = B$.

Prova

Supponiamo, per assurdo, che esista un punto x_0 di A tale che $x_0 \notin B$.

Poiché B è un sottoinsieme chiuso e convesso di X, per il Teorema V.2.10 di Dunford-Schwartz [13], esistono un numero reale c, un numero reale positivo $\epsilon > 0$ e un funzionale lineare e limitato $x_0' \in X'$, tale che:

$$x_0'(x) \leq c - \epsilon < c \leq x_0'(x_0) \quad , \quad \text{per ogni } x \in B \quad .$$

Da cui, visto che $x_0 \in A$, risulta:

$$s(x_0', B) = \sup_{x \in B} x_0'(x) \leq c - \epsilon < c \leq x'(x_0) \leq \sup_{x \in A} x_0'(x) = s(x_0', A) \quad .$$

Così $s(x_0', B) < s(x_0', A)$ e quindi l'assurdo.
Pertanto $A \subset B$.

Analogamente si prova che $B \subset A$. □

%

Lemma 3.5.
Sia $p : X' \to \mathbb{R}_\infty$ un'applicazione.

L'insieme H definito da:

$$H = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq p(x') \;, \;\; \textit{per ogni } x' \in X' \right\}$$

è un sottoinsieme convesso di X.

Prova

Se H è vuoto non c'è nulla da provare.

Supponiamo allora che H sia non vuoto.

Sia $x_0 \in H$.

Allora esiste una successione $(x_n)_n$ di punti di H che converge ad x_0 in X.

Fissiamo x' in X.

Dato che $x'(x_n) \leq p(x')$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, dalla continuità di x', discende che:

$$x'(x_n) = \lim_n x'(x_n) \leq p(x') \quad ,$$

Per l'arbitrarietà di x' in X' risulta che $x_0 \in H$, cioè H è un sottoinsieme chiuso di X.

Siano x, y due punti di e prendiamo un numero reale a nell'intervallo chiuso $[0, 1]$.

Fissiamo x' in X. Allora:

$$x'(x) \leq p(x') \quad \text{e} \quad x'(y) \leq p(x') \quad .$$

Per la linearità di x' si ha:

$$x'((1-a)x + ay) = (1-a)x'(x) + ax'(y) \leq (1-a)p(x') + ap(x') \quad .$$

Per l'arbitrarietà di x' in X' risulta che:

$$(1-a)x + ay \in H \quad ,$$

cioè H è un sottoinsieme convesso di X.

In conclusione $H = \overline{co}(H)$.

□

%

Teorema 3.6 (Castaing-Valadier [7]).
Sia $p : X' \to \mathbb{R}_\infty$ un funzionale sublineare e semicontinuo inferiormente, con $p(0) = 0$.

Allora esiste un unico sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto H di X, tale che:

$$p(x') = s(x', H) \quad , \quad \textit{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

Inoltre risulta:

$$H = \Big\{ x \in X \ \Big| \ x'(x) \leq p(x') \ , \ \ \textit{per ogni } x' \in X' \Big\} \quad .$$

Prova

Definiamo l'applicazione:

$$\varphi : X \to \tilde{\mathbb{R}}$$
$$\varphi(x) = \sup_{x' \in X'} \Big[x'(x) - p(x') \Big] \quad , \quad \text{per ogni } x \in X \quad ,$$

e l'applicazione:

$$\varphi^* : X \to \tilde{\mathbb{R}}$$
$$\varphi^*(x') = \sup_{x \in X} \Big[x'(x) - \varphi(x) \Big] \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Poiché, per ipotesi, $p(0) = 0$, risulta che,

$$\varphi(x) \in R_\infty \quad , \quad \text{per ogni } x \in X \quad ,$$

Dato che p è sublineare e s.c.i. , in virtù del teorema 1.10, risulta:

$$p(x') = \sup_{f \in M(X',p)} f(x') \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Fissiamo $f \in M(X', p)$.

Allora esistono un numero reale a e un elemento $x_0'' \in X''$, tali che

$$f(x') = x_0''(x') - a \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Per la riflessività di X, esiste un punto x_0 di X, tale che:

$$x_0''(x) = x'(x_0) \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Pertanto risulta:

$$p(x') \geq f(x') = x_0''(x') - a = x'(x_0) - a \quad ,$$

per ogni punto x' di X', ovvero,

$$a \geq x'(x_0) - p(x') \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

In definitiva:

$$a \geq \sup_{x' \in X'} \Big[x'(x_0) - p(x') \Big] \leq a < +\infty \quad ,$$

e quindi $\varphi(x_0) \in \mathbb{R}$.

Possiamo allora scrivere:

$$x'(x_0) - \varphi(x_0) \geq x'(x_0) - a \quad ,$$

per ogni $x' \in X'$.

Dalla definizione di φ^* discende che:

$$\varphi^*(x') \geq x'(x_0) - \varphi(x_0) \geq x'(x_0) - a = x_0''(x') - a = f(x') \quad ,$$

per ogni $x' \in X'$.

Per l'arbitrarietà di f in $M(x', p)$ risulta:

$$p(x') = \sup_{f \in M(X',p)} f(x') \leq \varphi^*(x') \quad ,$$

per ogni $x' \in X'$.

Supponiamo, per assurdo, che esista un punto $x_1' \in X'$ tale che:

$$p(x_1') < \varphi^*(x_1') \quad .$$

Poniamo $u = p(x_1')$. In corrispondenza ad $u \in \mathbb{R}$, $u < \varphi^*(x_1')$ esiste un punto x_1 in X, tale che

$$u < x_1'(x1) - \varphi(x_1) \quad ,$$

quindi con $\varphi(x_1) \in \mathbb{R}$.

Dalla definizione di φ risulta:

$$\varphi(x_1) \geq x_1'(x_1) - p(x_1') \quad ,$$

e quindi:

$$u < x_1'(x_1) - \varphi(x_1) \leq x_1'(x_1) - x_1'(x_1) + p(x_1') = p(x_1') = u$$

che è un assurdo.

Pertanto si ha che:

$$p(x') \geq \varphi^*(x') \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

In conclusione:

$$p(x') = \varphi^*(x') \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Dalla positiva omogenità di p discende che:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad \varphi(x) = +\infty \quad .$$

per ogni $x \in X$.

Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(x) = +\infty$, per ogni punto $x \in X$.

Allora, per la definizione di φ^* e per quanto abbiamo provato, si avrebbe che

$$p(x') = \varphi^*(x') = -\infty \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

che, evidentemente, è un assurdo.

Così esistono punti di X, in corrispondenza ai quali, φ assume il valore nullo.
Pertanto il sottoinsieme H di X definito da

$$H = \Big\{x \in X \;\Big|\; \varphi(x) = 0\Big\}$$

è non vuoto.

Sia x un punto di H.
Allora risulta: $0 = \varphi(x) \geq x'(x) - p(x')$, cioè $x'(x) \leq p(x')$, per ogni x' in X'.

Sia $x \in X$, tale che: $x'(x) \leq p(x')$, per ogni $x' \in X'$. Allora:

$$\varphi(x) = \sup_{x' \in X'} \Big[x'(x) - p(x')\Big] \leq 0$$

e quindi $\varphi(x) = 0$, cioè $x \in H$.

Pertanto

$$H = \Big\{x \in X \;\Big|\; x'(x) \leq p(x') \ , \ \text{per ogni } x' \in X'\Big\} \ .$$

Per il lemma 3.5, H è un sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto di X.

Inoltre:

$$p(x') = \varphi^*(x') = \sup_{x\in X}\left[x'(x) - \varphi(x)\right] = \sup_{x\in H}\left[x'(x) - \varphi(x)\right] = \sup_{x\in H} x'(x) = s(x', H) \quad ,$$

cioè $p(x') = s(x', H)$, per ogni $x' \in X'$.

Proviamo infine che H è unico.

Sia A un sottoinsieme chiuso, convesso e non vuoto di X, tale che:

$$p(x') = s(x', A) \quad , \quad \text{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

Allora risulta:

$$s(x', H) = p(x') = s(x', A) \quad , \quad \text{per ogni} \quad x' \in X' \quad ,$$

e quindi, per il teorema 3.4, $A = H$.

$\square$

%

Osservazione 3.7.
Se, nel teorema 3.6 ora provato, supponiamo che $p : X' \to \mathbb{R}$ sia un funzionale sublineare e limitato, per il lemma 3.3, otteniamo che esiste un unico sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto e <u>*limitato*</u> *H di X, tale che:*

$$p(x') = s(x', H) \quad , \quad \textit{per ogni} \quad x' \in X'$$

e tale insieme è definito da:

$$H = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \le p(x') \ , \ \ \textit{per ogni}\ x' \in X' \right\} \ .$$

Perciò il teorema 3.6 contiene come caso particolare il Lemma 3, e il relativo Corollario, provati da Datko in [10].

%

Corollario 3.8.
Sia A un sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto di X.

Allora:

$$A = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \le s(x', A) \ , \ \ \textit{per ogni}\ x' \in X' \right\} \ .$$

Prova

Per il lemma 3.1 la funzione supporto di A, $s(\cdot, A) : X' \to \mathbb{R}_\infty$ è un funzionale sublineare e semicontinuo inferiormente su X'.

Per il teorema 3.6 esiste un unico sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto H di X tale che

$$s(x', A) = s(x', H) \quad , \quad \text{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

Pertanto dal teorema 3.6 discende che $A = H$ e quindi:

$$A = H = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq s(x', A) \ , \ \text{ per ogni } x' \in X' \right\} \ .$$

□

%

Corollario 3.9.
Siano A, B due sottoinsiemi chiusi, convessi, non vuoti di X.

Allora $A \subset B$ se e solo se accade che

$$s(x', A) \leq s(x', B) \quad , \quad \textit{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

Prova

La parte necessaria è ovvia.

Proviamo la parte sufficiente.

Fissiamo x in A.

Allora è $x'(x) \leq s(x', A) \leq s(x', B)$, per ogni x' in X'.

Pertanto, per il corollario 3.8, risulta $x \in B$.

Così $A \subset B$.

□

%

Teorema 3.10.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X.

Allora vale:

$$s(x', A) = s(x', \overline{co}A) \quad , \quad \textit{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

e inoltre:

$$\overline{co}A = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq s(x', A) \ , \ \ \textit{per ogni } x' \in X' \right\} \ .$$

Prova

Fissiamo $x' \in X'$.

Poiché $A \subset \overline{co}A$, per la monotonia dell'estremo superiore risulta:

$$s(x', A) \leq s(x', \overline{co}A) \quad .$$

Fissiamo quindi un punto in $\overline{co}A$.

Allora esiste una successione $(x_n)_n$ di punti di coA che converge ad x.
Per ogni $n = 1, 2, ...$ è possibile trovare m_n punti $y_1^{(n)}, ..., y_{m_n}^{(n)}$ di A ed m_n numeri reali $a_1^{(n)}, ..., a_{m_n}^{(n)}$ di $[0, 1]$, con $\sum\limits_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} = 1$, tali che

$$x_n = \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} y_k^{(n)} \quad .$$

Per la linearità di x', si ha:

$$\begin{aligned} x'(x_n) &= \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} x'(y_k^{(n)}) \leq \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} s(x', A) = \\ &= s(x', A) \sum_{k=1}^{m_n} a_k^{(n)} = s(x', A) \ , \ \ \text{per ogni } n = 1, 2, ... \quad . \end{aligned}$$

Pertanto, dalla continuità di x', discende che:

$$x'(x) = \lim_n x'(x_n) \leq s(x', A) \quad .$$

Per l'arbitrarietà di $x \in \overline{co}A$ si ha:

$$s(x', \overline{co}A) = \sup_{x \in \overline{co}A} x'(x) \leq s(x', A) \quad .$$

In conclusione:

$$s(x', A) = s(x', \overline{co}A) \quad , \quad \text{per ogni } x' \text{ in } X' \quad .$$

Allora, dato che $\overline{co}A$ è un sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto di X, per il corollario 3.8, risulta:

$$\overline{co}A = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq s(x', A) \ , \ \text{ per ogni } x' \in X' \right\} \ .$$

$\square$

%

Corollario 3.11.
Sia A un sottoinsieme non vuoto di X.

Allora risultano:

$$\|A\| = \|coA\| = \|\overline{co}A\| \quad .$$

Prova

Dato che $A \subset coA \subset \overline{co}A$, per la monotonia dell'estremo superiore risulta:

$$\|A\| \leq \|coA\| \leq \|\overline{co}A\| \quad .$$

Ma per il teorema 3.10 e per la proposizione 3.2, si ha

$$\|A\| = \sup_{x' \in S'} |s(x', A)| = \sup_{x' \in S'} |s(x', \overline{co}A)| = \|\overline{co}A\| \quad .$$

Perciò

$$\|A\| = \|coA\| = \|\overline{co}A\|$$

ovvero l'asserto. $\square$

%

Proposizione 3.12.
Siano A, B due sottoinsiemi non vuoti di X e sia a un numero reale non negativo.

Allora valgono:

(1) $s(x', A + B) = s(x', A) + s(x', B)$, *per ogni* $x' \in X'$ *;*

(2) $s(x', aA) = as(x', A)$, *per ogni* $x' \in X'$ *.*

Prova

Proviamo l'affermazione (1).

Fissiamo un funzionale x' in X'.

Ovviamente vale la disuguaglianza

$$s(x', A+B) \leq s(x', A) + s(x', B) \quad .$$

Sia ora x un punto di A.

Per ogni $y \in B$ è $x + y \in A + B$ e quindi, per la linearità di x', risulta

$$x'(x) + x'(y) = x'(x+y) \leq s(x', A+B) \ , \ \text{ per ogni } y \in B \ .$$

Passando in tale espressione, all'estremo superiore per $y \in B$ risulta:

$$x'(x) + s(x', B) \leq s(x', A+B) \ , \ \text{ per ogni } x \in A \ .$$

e quindi:

$$s(x', A) + s(x', B) \leq s(x', A+B) \ .$$

per ogni x' in X' .

L'affermazione (2) è banale.

$\square$

%

Osservazione 3.13.
Notiamo che l'affermazione (1) della proposizione 3.12 contiene, come caso particolare, il Lemma 8 provato da Datko in [10].

%

∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘

Capitolo 3

L'equivalenza delle metriche d_ν, d, h negli spazi finito dimensionali

1 Metrica di Hausdorff e funzioni supporto

In questo paragrafo proveremo un'importante relazione che intercorre tra la metrica di Hausdorff e le funzioni supporto.

A tale proposito indicheremo con $B_{X'}$, la boccia unitaria chiusa di X'm cioè:

$$B_{X'} = \left\{ x' \in X' \;\middle|\; \|x'\| \leq 1 \right\} .$$

Ricordiamo che $B_{X'}$, è un sottoinsieme chiuso, limitato, convesso, non vuoto di X'.

%

Lemma 1.1.
Siano $A, B \in \overline{co}K(X)$.

Allora vale:

$$\inf_{y \in B} \sup_{x' \in B_{X'}} x'(x-y) = \sup_{x' \in B_{X'}} \inf_{y \in B} x'(x-y)$$

per ogni punto x *di* A .

Prova

Notiamo che X e X' sono due spazi di Banach riflessivi e che:

B è un sottoinsieme chiuso, limitato, convesso, non vuoto di X,

$B_{X'}$ è un sottoinsieme chiuso, limitato, convesso, non vuoto di X'.

Sia x un fissato punto di A.

Definiamo l'applicazione $L : B \times B_{X'} \to \mathbb{R}$ come

$$L(y, x') = x'(x-y) \ , \ \text{ per ogni } (y, x') \in B \times B_{X'} \ .$$

Fissiamo $y \in B$.

Siano $x'_1, x'_2 \in B_{X'}$ e sia a in $[0, 1]$.

Allora valgono:

$$L(y, (1-a)x'_1 + ax'_2) = ((1-a)x'_1 + ax'_2)(x-y) =$$
$$= (1-a)x'_1(x-y) + ax'_2(x-y) = (1-a)L(y, x'_1) + aL(y, x'_2) \quad ,$$

e

$$\begin{aligned}&|L(y,x'_1)-L(y,x'_2)| = |x'_1(x-y)-x'_2(x-y)| = \\ &= |(x'_1-x'_2)(x-y)| \le \|x-y\|\|x'_1-x'_2\| \quad .\end{aligned}$$

Quindi l'applicazione

$$x' \mapsto L(y,x') \quad , \quad x' \in B_{X'}$$

è convessa, concava, continua, per ogni $y \in B$.

Fissiamo quindi $x' \in B_{X'}$.

Siano $y_1, y_2 \in B$ e sia $a \in [0,1]$.
Allora valgono:

$$\begin{aligned}&L((1-a)y_1+ay_2,x') = x'(x-(1-a)y_1-ay_2) = \\ &= x'((1-a)x+ax-(1-a)y_1-ay_2) = \\ &= (1-a)x'(x-y_1)+ax'(x-y_2) = \\ &= (1-a)L(y_1,x')+aL(y_2,x') \quad ,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&|L(y_1,x')-L(y_2,x')| = |x'(x-y_1)-x'(x-y_2)| = \\ &= |x'(x-y_1-x+y_2| = |x'(y_1-y_2)| \le \|x'\|\|y_1-y_2\| \quad .\end{aligned}$$

Così l'applicazione

$$y \mapsto L(y,x') \quad , \quad y \in B$$

è convessa, concava, continua, per ogni $x' \in B_{X'}$.

Allora la applicazione L soddisfa alle ipotesi della Proposizione VI.2.1 di Ekelend-Temam [14] e pertanto vale:

$$\min_{y\in B}\max_{x'\in B_{X'}} L(y,x') = \max_{x'\in B_{X'}}\min_{y\in B} L(y,x')$$

cioè per la definizione di L:

$$\inf_{y\in B}\sup_{x'\in B_{X'}} x'(x-y) = \sup_{x'\in B_{X'}}\inf_{y\in B} x'(x-y) \quad .$$

Per la arbitrarietà di $x \in A$ si ha l'asserto. □

%

Teorema 1.2 (Castaing-Valadier [7]).
Siano $A, B \in \overline{co}K(X)$.

Allora valgono:

(1) $\rho(A,B) = \sup\limits_{x' \in B_{X'}} [s(x',A) - s(x',B)]$ *;*

(2) $h(A,B) = \sup\limits_{x' \in B_{X'}} |s(x',A) - s(x',B)|$ *;*

(3) $h(A,B) = \sup\limits_{x' \in S'} |s(x',A) - s(x',B)|$ *.*

Prova

(1) Ricordiamo che, come posto nelle definizioni 2.3 del Capitolo 1, risulta:

$$\rho(A,B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\| \ .$$

Per una conseguenza del Teorema di Hahn-Banach si ha:

$$\|x - y\| = \sup_{x' \in B_{X'}} x'(x - y) \ .$$

per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in B$.

Così per il lemma precedente e per il lemma 1.1 del Capitolo 1, risulta:

$$\begin{aligned}
\rho(A,B) &= \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\| = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \sup_{x' \in B_{X'}} x'(x-y) = \\
&= \sup_{x \in A} \sup_{x' \in B_{X'}} \inf_{y \in B} x'(x-y) = \sup_{x' \in B_{X'}} \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} [x'(x) - x'(y)] = \\
&= \sup_{x' \in B_{X'}} \sup_{x \in A} \left[x'(x) - \sup_{y \in B} x'(y) \right] = \\
&= \sup_{x' \in B_{X'}} \left[\sup_{x \in A} x'(x) - \sup_{y \in B} x'(y) \right] \quad ,
\end{aligned}$$

cioè:

$$\rho(A,B) = \sup_{x' \in B_{X'}} [s(x',A) - s(x',B)] \quad .$$

(2) Analogamente a quanto fatto in (1) si prova che:

$$\rho(B,A) = \sup_{x' \in B_{X'}} [s(x',B) - s(x',A)] \quad .$$

Così per la definizione di h:

$$\begin{aligned}
h(A,B) &= \max \Big\{ \rho(A,B),\ \rho(B,A) \Big\} = \\
&= \max \Big\{ \sup_{x' \in B_{X'}} [s(x',A) - s(x',B)], \sup_{x' \in B_{X'}} [s(x',B) - s(x',A)] \Big\} = \\
&= \sup_{x' \in B_{X'}} |s(x',A) - s(x',B)| \quad .
\end{aligned}$$

(3) Fissiamo $x' \in B_{X'}$ e sia, senza restrizioni, $x' \neq 0$.

Allora: $0 < \|x'\| \leq 1$. Inoltre $y' = \frac{x'}{\|x'\|} \in S'$.

Per la positiva omogeneità di $s(\cdot, A)$ e $s(\cdot, B)$, risulta:

$$\begin{aligned}
&|s(x', A) - s(x', B)| = \Big| s(\|x'\| y', A) - s(\|x'\| y', B) \Big| = \\
&= \|x'\| = |s(y', A) - s(y', B)| \leq |(s(y', A) - s(y', B)| \leq \\
&\leq \sup_{x' \in S'} |s(x', A) - s(x', B)| \quad .
\end{aligned}$$

Dato che $S' \subset B_{X'}$, per l'arbitrarietà di x' in $B_{X'}$, si deduce:

$$\sup_{x' \in B_{X'}} |s(x', A) - s(x', B)| \leq \sup_{x' \in S'} |s(x', A) - s(x', B)| \leq \sup_{x' \in B_{X'}} |s(x', A) - s(x', B)| \ .$$

Per la parte (2) del teorema, allora:

$$\begin{aligned}
h(A, B) &= \sup_{x' \in B_{X'}} |s(x', A) - s(x', B)| = \\
&= \sup_{x' \in S'} |s(x', A) - s(x', B)| \quad .
\end{aligned}$$

$\square$

%

2 Combinazioni lineari in spazi normati di dimensione finita

In questo paragrafo, proveremo un interessante teorema che mostra come un sottoinsieme ovunque denso nella sfera unitaria di uno spazio normato di dimensione finita, genera un cono convesso che invade l'intero spazio.

A tale proposito indicheremo con E uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$ sui numeri reali, di dimensione finita m .

Denoteremo ancora con S la sfera unitaria

$$S = \left\{ x \in E \middle| \|x\| = 1 \right\}$$

di tale spazio.

%

Teorema 2.1.
Sia D un sottoinsieme ovunque denso di S.

Per ogni vettore non nullo x di E, esistono m vettori linearmente indipendenti $x_1, ..., x_m$ di D ed m numeri reali positivi $a_1, ..., a_m$ tali che:

$$x = \sum_{h=1}^{m} a_h x_h \ .$$

Prova

Se $m = 1$ la dimostrazione è ovvia.

Supponiamo allora che $m > 1$.

Fissiamo un vettore non nullo x di E.

Poiché $m > 1$ esistono $m - 1$ vettori linearmente indipendenti $y_1, ..., y_{m-1}$ di E, tali che:

$$x, y_1, ..., y_{m-1}$$

costituiscono una base di E.

Poniamo $y_m = x - \sum\limits_{h=1}^{m-1} y_h$, così che:

$$x = \sum_{h=1}^{m} y_h \ .$$

Fissiamo $t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}$ tali che $\sum\limits_{h=1}^{m} t_h y_h = 0$.

Allora:

$$0 = \sum_{h=1}^{m} t_h y_h = \sum_{h=1}^{m-1} t_h y_h + t_m x - \sum_{h=1}^{m-1} t_m y_h = t_m x - \sum_{h=1}^{m-1} (t_m - t_h) y_h \ .$$

e quindi

$$t_m x = \sum_{h-1}^{m-1} (t_m - t_h) y_h \ .$$

Sia, per assurdo, $t_m \neq 0$.

Allora è $x = \sum\limits_{h=1}^{m-1} \frac{t_m - t_h}{t_m} y_h$, e quindi x è combinazione lineare di $y_1, ..., y_m$.

Ne segue che $t_m = 0$.

Ma allora

$$\sum_{h=1}^{m-1} t_h y_h = 0 \ ,$$

e poiché $y_1, ..., y_{m-1}$ sono linearmente indipendenti si ha: $t_1 = t_2 = ... = t_{m-1} = 0$.

Quindi $y_1, ..., y_{m-1}, x$ sono linearmente indipendenti.

Abbiamo trovato m vettori linearmente indipendenti $y_1, ..., y_m$ di E, tali che:

$$x = \sum_{h=1}^{m} y_h \ .$$

Dato che $y_1, ..., y_m$ sono linearmente indipendenti, nessuno di essi è nullo e quindi:

$$\|y_h\| > 0 \ , \text{ per ogni } h = 1, 2, ..., m \ .$$

Possiamo allora porre:

$$z_h = \frac{y_h}{\|y_h\|} \in S \quad , \quad h = 1, ..., m \ ;$$

$$b_h = \|y_h\| > 0 \quad , \quad h = 1, ..., m \ .$$

Dalla indipendenza lineare di $y_1, ..., y_m$ discende che $z_1, ..., z_m$ sono m vettori linearmente indipendenti di S.

Inoltre:

$$x = \sum_{h=1}^{m} y_h = \sum_{h=1}^{m} \|y_h\| \frac{y_h}{\|y_h\|} \quad \text{, cioè}$$

$x = \sum\limits_{h=1}^{m} b_h z_h$ dove $b_h = \|y_h\| > 0$ per ogni $h = 1, ..., m$.

Dato che $z_1, ..., z_m$ sono linearmente indipendenti, per il Lemma delle Combinazioni Lineari, esiste un numero reale $K > 0$ tale che:

$$K \sum_{h=1}^{m} |a_h| \leq \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h z_h \right\| \quad ,$$

per ogni $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$.

Poiché $b_h > 0$ per $h = 1, ..., m$, risulta

$$\min_{h=1,...,m} b_h > 0 \quad .$$

Allora possiamo scegliere $\epsilon > 0$ tale che:

$$0 < \epsilon < \min_{h=1,...,m} b_h > 0 \quad ,$$

per cui $b_h - \epsilon > 0$, per $h = 1, ...m$.

Visto che $K > 0$ ed $\epsilon > 0$ risulta:

$$\delta = \frac{K^2 \epsilon}{\|x\| + K\epsilon} > 0 \quad ,$$

Inoltre visto che $x \neq 0$, risulta:

$$K - \delta = K - \frac{K^2 \epsilon}{\|x\| + K\epsilon} = \frac{K\|x\| + K^2\epsilon - K^2\epsilon}{\|x\| + K\epsilon} =$$
$$= \frac{K\|x\|}{\|x\| + K\epsilon} > 0$$

e quindi $K - \delta > 0$, ovvero $0 < \delta < K$.

Sia $h = 1, ..., m$ fissato.

Per costruzione $z_h \in S$.

Dato che, per ipotesi, D è un sottoinsieme ovunque denso di S, in corrispondenza a $\delta > 0$ esiste un punto $x_h \in D$ tale che:

$$\|z_h - x_h\| < \delta \quad .$$

Così $x_1, ..., x_m \in D$ sono tale che:

$$\|z_h - x_h\| < \delta < K$$

per ogni $h = 1, ..., m$.

Per il Corollario 20.7 di Jameson [16] abbiamo che $x_1, ..., x_m$ sono m vettori linearmente indipendenti di D.

Poiché la dimensione di E è m, risulta che $x_1, ..., x_m$ costituiscono una base di E.

Allora esistono $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\sum_{h=1}^{m} a_h x_h \quad ,$$

in quanto x appartiene ad E .

Innanzi tutto:

$$\begin{aligned}
K \sum_{h=1}^{m} |a_h| &\leq \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h z_h \right\| = \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h z_h - \sum_{h=1}^{m} a_h x_h + \sum_{h=1}^{m} a_h x_h \right\| = \\
&= \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h (z_h - x_h) + \sum_{h=1}^{m} a_h x_h \right\| \leq \sum_{h=1}^{m} |a_h| \|z_h - x_h\| + \|x\| \leq \\
&\leq \sum_{h=1}^{m} |a_h| \delta + \|x\| = \delta \sum_{h=1}^{m} |a_h| + \|x\| \quad .
\end{aligned}$$

e perciò

$$(K - \delta) \sum_{h=1}^{m} |a_h| \leq \|x\| \quad .$$

Ne segue che, essendo $K - \delta = \frac{K\|x\|}{\|x\| + K\epsilon} > 0$ risulta:

$$\sum_{h=1}^{m} |a_h| \leq \frac{\|x\|}{K - \delta} = \|x\| \frac{\|x\| + K\epsilon}{K\|x\|}$$

e quindi:

$$\sum_{h=1}^{m} |a_h| \leq \frac{\|x\| + K\epsilon}{K} \quad .$$

Ancora, visto che:

$$\sum_{h=1}^{m} a_h x_h = x = \sum_{h=1}^{m} b_h z_h$$

risulta:

$$K \sum_{h-1}^{m} |a_h - b_h| \leq \left\| \sum_{h=1}^{m} (a_h - b_h) z_h = \right\| = \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h z_h - \sum_{h=1}^{m} b_h z_h \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{h=1}^{m} a_h z_h - \sum_{h=1}^{m} a_h x_h \right\| \leq \sum_{h=1}^{m} |a_h| \|z_h - x_h\| \leq \sum_{h=1}^{m} |a_h| \delta \leq$$

$$\leq \delta \frac{\|x\| + K\epsilon}{K} = \frac{K^2 \epsilon}{\|x\| + K\epsilon} \cdot \frac{\|x\| + K\epsilon}{K} = K\epsilon \quad .$$

Ne segue che:

$$K \sum_{h=1}^{m} |a_h - b_h| \leq K\epsilon$$

ed essendo $K > 0$ risulta:

$$\sum_{h=1}^{m} |a_h - b_h| \leq \epsilon \quad .$$

Sia $h = 1, 2, ..., m$.

Allora

$$|a_h - b_h| = \sum_{j=1}^{m} |a_j - b_j| \leq \epsilon$$

e quindi risulta

$$a_h - b_h \geq \epsilon \quad \text{ovvero} \quad a_h \geq b_h - \epsilon > 0 \quad .$$

per cui $a_h > 0$ per ogni $h = 1, ..., m$.

Così $x_1, ..., x_m$ sono m vettori linearmente indipendenti di D e $a_1, ..., a_m$ sono m numeri reali positivi, tali che:

$$x = \sum_{h=1}^{m} a_h x_h \quad ,$$

cioè l'asserto . □

%

3 Le metriche d_ν, d, h negli spazi di dimensione finita

In questo paragrafo ci occuperemo di stabilire la relazione che intercorre tra le topologie τ_ν, τ_d, τ_h definite nel Capitolo 1, quando lo spazio di Banach ha dimensione finita.

Rammentiamo che se $X = (X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach di dimensione finita m, allora il duale topologico $X' = (X', \|\cdot\|)$ di X, è ancora uno spazio di Banach di dimensione finita m e coincide con il duale algebrico X^* di X.

Come nelle definizioni 2.5 del Capitolo 1 sia $\nu = \{x_i'\}_i$ un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso della sfera unitaria S' di X' e siano d_ν e d le due metriche di Datko, definite su $\overline{co}K(X)$, mediante ν .

%

Teorema 3.1.
Supponiamo che X abbia dimensione finita m.

Se $(A_n)_n$ è una successione in $\overline{co}K(X)$ che converge nella metrica d_ν ad un insieme $A \in \overline{co}K(X)$, allora la successione $(A_n)_n$ converge ad A nella metrica h .

Prova

Sia $(A_n)_n$ una successione in $K(X)$ che converge nella metrica d_ν ad un insieme $A \in K(X)$.

Per il teorema 2.12 del Capitolo 1, cioò equivale a dire

$$\lim_n |x_i'(A_n) - x_i'(A)| = 0 \ , \ \text{ per ogni } \quad i = 1, 2, ... \quad ,$$

cioè che:

$$\lim_n s(x_i', A_n) = s(x_i', A) \quad ,$$

per ogni $i = 1, 2, ...$.

Per ogni $n = 1, 2, ...$, dato che A_n è limitato, per il lemma 3.3 del Capitolo 2, la funzione supporto $s(\cdot, A_n)$ è un funzionale sublineare e limitato e risulta $\|s(\cdot, A_n)\| = \|A_n\|$.

Così $\{s(\cdot, A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia non vuota di funzionali $s(\cdot, A_n) : X' \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sublineari e limitati.

Fissiamo un intero i.

Poiché la successione $(s(x'_i, A_n))_n$ converge a $s(x', A)$ in $\mathbb{R}$, esiste un numero reale non negativo M_i tale che:

$$|s(x', A_n)| \leq M_i \ , \ \text{per ogni} \quad n = 1, 2, ... \ .$$

Sia ora x' un punto di X' e supponiamo, senza restrizioni, che $x' \neq 0$.

Per la definizione della metrica d_ν, risulta che ν è un sottoinsieme numerabile ed ovunque denso della sfera unitaria S' di X'.

Pertanto il teorema 2.1 del paragrafo precedente ci permette di affermare che, in corrispondenza ad $x' \in X'$, $x' \neq 0$, esistono m vettori linearmente indipendenti $x'_{i_1}, ..., x'_{i_m}$ di $\nu = \{x'_i\}_i$ ed m numeri reali positivi $a_1, ..., a_m$ tali che:

$$\sum_{h=1}^{m} a_h x'_{i_n} \ .$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$.

Allora sono:

$$|s(x'_{i_h}, A_n)| \leq M_{i_h} \ , \ \text{per ogni} \quad h = 1, 2, ...m \ .$$

Dato che la funzione supporto $s(\cdot, A_n)$ è un funzionale sublineare e che $a_1, ..., a_m$ son positivi, risulta:

$$s(x', A_n) = s\left(\sum_{h=1}^{m} a_h x'_{i_h}, A_n)\right) \leq \sum_{h=1}^{m} a_h s(x'_{i_h}, A_n) \leq \sum_{h=1}^{m} a_h M_{i_h} \ .$$

Ovviamente $M'_x = \sum_{h=1}^{m} a_h M_{i_h}$ è un numero reale non negativo che dipende solamente dalla scelta di $x' \in X'$.

Allora abbiamo provato che per ogni $x' \in X'$ esiste un numero reale non negativo M'_x, tale che:

$$s(x', A_n) \leq M'_x \ , \ \text{per ogni} \quad n = 1, 2, ... \ ,$$

Per quanto già visto e poiché X' è uno spazio di Banach, dal 2.6 del Capitolo 2, discende che esiste un numero reale $M \geq 0$ tale che:

$$\|A_n\| = \|s(\cdot, A_n)\| \leq M \ , \ \text{per ogni} \quad n = 1, 2, ... \ .$$

Perciò la successione $(A_n)_n$ è uniformemente limitata.

Siano ora x', y' due punti di X'.

Allora facilmente si prova che:

$$|s(x', A_n) - s(y', A_n)| \leq \|A_n\| \|x' - y'\| \leq M\|x' - y'\|$$

per ogni $n = 1, 2, ...$ e che

$$|s(x', A_n) - s(y', A_n)| \leq \|A\| \|x' - y'\| \quad .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$p_n : S' \to \mathbb{R} \qquad\qquad p_n(x') = s(x', A_n) \quad , \quad x' \in S'$$

e definiamo inoltre:

$$p : S' \to \mathbb{R} \qquad\qquad p(x') = s(x', A) \quad , \quad x' \in S'$$

Abbiamo che:

$$|p_n(x') - p(x')| \leq M\|x' - y'\| \ , \ \text{ per ogni } x', y' \in S'$$

e per ogni $n = 1, 2, ...$.

Così la successione di funzioni $(p_n)_n$ è equicontinua su S'.

Fissiamo un punto x' di S' e un numero reale $\epsilon > 0$.

In corrispondenza esiste un intero i tale che:

$$\|x' - x'_i\| < \frac{\epsilon}{2}(M + \|A\| + 1) \quad .$$

Poiché $\lim_n s(x'_i, A_n) = s(x'_i, A)$ esiste un numero naturale $\overline{n} = \overline{n}(i, \epsilon/2)$ tale che se $n \geq \overline{n}$ allora:

$$|s(x', A_n) - s(x', A)| < \epsilon/2 \quad .$$

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \overline{n}$.

Allora:

$$\begin{aligned}
&|p_n(x') - p(x')| = |s(x', A_n) - s(x', A)| \le \\
&\le |s(x', A_n) - s(x'_i, A_n)| + |s(x'_i, A_n) - s(x'_i, A)| + |s(x'_i, A) - s(x', A)| \le \\
&\le \|A_n\|\|x' - x'_i\| + |s(x'_i, A_n) - s(x'_i, A)| + \|A\|\|x'_i - x'\| \le \\
&\le (M + \|A\|)\|x' - x'_i\| + |s(x'_i, A_n) - s(x'_i, A)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \quad .
\end{aligned}$$

Perciò $\lim\limits_n p_n(x') = p(x')$.

Per l'arbitrarietà di x' in S' la successione di funzioni $(p_n)_n$ converge puntualmente alla funzione p, su S'.

Ma X ha dimensione finita, e così pure il suo duale topologico X', perciò la sfera unitaria S' è un sottospazio compatto di X', nella topologia della norma.

Poiché la successione di funzioni $(p_n)_n$ è equicontinua e converge puntualmente alla funzione p sullo spazio topologico compatto S', per un noto teorema, la successione $(p_n)_n$ converge uniformemente a p su S'.

Pertanto, in virtù del teorema 1.2, di questo capitolo, risulta:

$$\lim_n h(A_n, A) = \lim_n \left\{ \sup_{x' \in S'} |s(x', A_n) - s(x', A)| \right\} = \lim_n \left\{ \sup_{x' \in S'} |p_n(x') - p(x)| \right\} = 0 \ ,$$

cioè l'asserto. $\square$

%

Corollario 3.2.
Supponiamo che X abbia dimensione finita m .

Allora le topologie τ_ν, τ_d, τ_h, sono uguali, cioè d_ν, d, h sono equivalenti.

Prova

Per il teorema precedente, ogni successione $(A_n)_n$ in $\overline{co}K(X)$ che converge nella metrica d_ν ad un insieme A appartenente a $\overline{co}K(X)$, converge ad A nella metrica h.

Per il corollario 1.2 del Capitolo 1 la topologia τ_h è più debole della topologia τ_ν, cioè:

$$\tau_h \subset \tau_\nu \quad .$$

Ma per il corollario 2.11 del Capitolo 1, sono

$$\tau_\nu \subset \tau_d \subset \tau_h \quad .$$

Allora $\tau_\nu = \tau_d = \tau_h$, cioè l'asserto . $\square$

%

∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘∘

Capitolo 4

Multifunzioni, selettori ed integrale di Aumann

1 Multifunzioni, selettori e misurabilità

Come abbiamo fatto fin ad ora, anche qui lavoreremo con uno spazio di Banach $X = (X, \|\cdot\|)$ su $\mathbb{R}$ separabile e riflessivo, sebbene molti dei risultati che riportiamo in questo paragrafo sussistano in ambienti alquanto più generali.

Denoteremo con 2^X la famiglia delle parti non vuote di X.

Nel seguito $(T, \mathscr{T}, \mu)$ indicherà uno spazio di misura fornito di una misura μ positiva e finita e di una σ-algebra $\mathscr{T}$, che è supposta μ-completa.

%

Osservazioni 1.1.
Stabiliamo fin da ora di considerare uguali due applicazioni $\sigma, \varphi : T \to X$ che siano uguali quasi ovunque su T.

Così quando noi parleremo di un'applicazione $\sigma : T \to X$ in effetti sarà semplicemente un rappresentante della classi di equivalenza $[\sigma]$, rispetto alla relazione di uguale quasi ovunque, tra applicazione da T in X .

%

Definizioni 1.2.
Diremo che un'applicazione $\sigma : T \to X$ è MISURABILE, se esiste una successione di funzioni semplice, da T in X che converge quasi ovunque a σ.

Tale definizione coincide quella III.2.10 di [13] in quanto $\mu(T) < +\infty$.

° ° °

Indicheremo con $M(T, X)$ lo spazio lineare delle funzioni misurabili definite su T e a valori in X .

Analogamente $M(T)$ denoterà lo spazio lineare delle funzioni misurabili a valori reali, definite su T .

Infine indicheremo con $M(T, \tilde{\mathbb{R}})$ la famiglia delle funzioni misurabili, a valori reali estesi, definite su T.

%

Osservazione 1.3.
Ricordiamo che un'applicazione $\sigma : T \to X$ *è detta* <u>*DEBOLMENTE MISURABILE*</u> *se l'applicazione*

$$x'\sigma : T \to \mathbb{R} \qquad (x'\sigma)(t) = x'(\sigma(t)) \quad , \quad t \in T$$

è misurabile, per ogni $x' \in X'$*, come funzione a valori reali.*

Poiché X *è separabile, per il Teorema III.6.11 di Dunford-Schwartz [13], il concetto di debole misurabilità è equivalente a quello di misurabilità, così come è stato posto nelle definizioni 1.2 .*

%

Definizioni 1.4.
Diremo che un'applicazione $\sigma : T \to X$ *è* <u>*INTEGRABILE*</u> *(secondo Bochner) su* T*, se esiste una successione* $(\varphi_n)_n$ *di funzioni semplici che converge quasi ovunque a* σ *su* T *e tale che:*

$$\lim_n \int_T \|\varphi_n(t) - \sigma(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \quad .$$

Dato un insieme misurabile $E \in \mathscr{T}$*, diciamo* <u>*INTEGRALE SU E*</u> *della funzione* σ *il vettore:*

$$\int_E \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \lim_n \int_E \varphi_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Indicheremo semplicemente con $\int \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$ *l'integrale di* σ *su* T *.*

∘ ∘ ∘

Denoteremo con $L_1(T, X)$ l'insieme di tutte le funzioni integrabili su T e a valori in X.

Notiamo che $L_1(T, X) \subset M(T, X)$.

Analogamente $L_1(T)$ denoterà l'insieme di tutte le funzioni a valori reali, integrabili su T.

%

Osservazione 1.5.
L'insieme $L1(T)$, definito sopra, è uno spazio lineare su $\mathbb{R}$, rispetto alle operazioni usuali di somma e prodotto per uno scalare.

Inoltre su $L_1(T,X)$ è definita la norma:

$$\|\sigma\|_1 = \int \|\sigma(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) \quad , \quad \textit{per ogni} \;\; \sigma \in L_1(T,X) \quad .$$

Per il Teorema III.6.6 di Dunford-Schwartz [13] lo spazio normato $L_1(T,X) = (L_1(T,X), \|\cdot\|_1)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{R}$.

%

Definizione 1.6.
Chiameremo <u>*MULTIFUNZIONE*</u> *una applicazione $F : T \to 2^X$ definita su T e a valori nella famiglia delle parti non vuote di X.*

%

Definizioni 1.7.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione.

∘ ∘ ∘

Per ogni sottoinsieme A di X denoteremo con $F^-(A)$ il sottoinsieme di T definito da:

$$F^- = \Big\{ t \in T \;\Big|\; F(t) \cap A \neq \emptyset \Big\} \quad .$$

∘ ∘ ∘

Diremo <u>*GRAFICO*</u> *della multifunzione F il sottoinsieme $G(F)$ del prodotto cartesiano $T \times X$ definito da:*

$$G(F) = \Big\{ (t,x) \in T \times X \;\Big|\; x \in F(t) \Big\}$$

∘ ∘ ∘

Diremo <u>*SELETTORE*</u> *della multifunzione F una applicazione $\sigma : F \to X$ tale che:*

$$\sigma(t) \in F(t) \quad , \quad \textit{per ogni} \quad t \in T \quad .$$

%

Definizione 1.8.
Sia $F : T \to 2^X$ *una multifunzione.*

Indicheremo con S_F *la famiglia di tutti e soli i selettori misurabili di* F*, cioè:*

$$S_F = \left\{ \sigma \in M(T, X) \;\middle|\; \sigma \text{ è un selettore di } F \right\} \quad .$$

%

Osservazione 1.9.
Nello spazio di Banach X *si può definire la* <u>σ*-algebra di Borel*</u> $\mathscr{B}(X)$*, come la più piccola* σ*-algebra di* X *che contiene tutti gli insiemi aperti di* X *.*

Perciò nel prodotto cartesiano $T \times X$ *resta definita la* <u>σ*-algebra prodotto*</u> $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}$ *come la più piccola* σ*-algebra di* $T \times X$ *che contiene tutti gli insiemi della forma* $E \times U$ *dove* $E \in \mathscr{T}$ *e* $U \in \mathscr{B}$ *.*

%

Definizione 1.10.
Diremo che che una multifunzione $F : T \to 2^X$ *è a* <u>*GRAFICO MISURABILE*</u>*, se il grafico* $G(F)$ *di* F*, appartiene alla* σ*-algebra prodotto* $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}$*, definita nell'osservazione precedente.*

%

Definizione 1.11.
Diremo che una multifunzione $F : T \to 2^X$ *é* <u>*MISURABILE*</u>*, se per ogni sottoinsieme aperto* U *di* X*, l'insieme*

$$F^-(U) = \left\{ t \in T \;\middle|\; F(t) \cap U \neq \emptyset \right\}$$

è misurabile, cioè appartiene a $\mathscr{T}$ *.*

%

Osservazione 1.12.
Sia P *una proprietà relativa ai sottoinsiemi di* X*, ad esempio, la chiusura o la convessità.*

Diremo che una multifunzione $F : T \to 2^X$ *è a* <u>*VALORI P*</u> *se per ogni* t *in* T*, F(t) è un sottoinsieme di* X *che possiede la proprietà* P *.*

%

Daremo ora un importante teorema, provato da Castaing-Valadier in [7], che stabilisce degli utili criteri per la misurabilità di una multifunzione.

Tale teorema, inoltre, mostra che una multifunzione a valori chiusi e non vuoti, in uno spazio di Banach separabile, possiede dei selettori misurabili.

%

Teorema 1.13 (Castaing-Valadier [7]).
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione a valori chiusi e non vuoti.

Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) *F è misurabile;*

(b) *l'applicazione $t \mapsto d(x, F(t))$, $t \in T$ è misurabile, per ogni x in X;*

(c) *F ammette una successione di selettori misurabili $(\sigma_n)_n \subset S_F$, tale che*

$$F(t) = \overline{\left\{\sigma_n(t)\right\}_n} \quad , \quad \text{per ogni} \quad t \in T \quad ;$$

(d) *F è a grafico misurabile;*

(e) *$F^-(B) \in \mathscr{T}$, per ogni insieme di Borel $B \in \mathscr{B}(X)$;*

(f) *$F^-(C) \in \mathscr{T}$, per ogni sottoinsieme chiuso C di X.*

Prova

Come abbiamo supposto, X è uno spazio di Banach separabile.

Inoltre $(T, \mathscr{T}, \mu)$ è uno spazio di misura con una misura a valori reali $\mu \geq 0$, finita e con una σ-algebra $\mathscr{T}$, $\mu-$-completa.

Allora applicando il Teorema III.30 di Castaing-Valadier [7], segue l'asserto.
$\square$

%

Proposizione 1.14.
Sia (E, τ) uno spazio topologico e sia D un sottoinsieme ovunque denso di E.

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua.

Allora valgono:

(1) $\sup\limits_{x \in E} f(x) = \sup\limits_{z \in D} f(z)$ *;*

(2) $\inf\limits_{x \in E} f(x) = \inf\limits_{z \in D} f(z)$ *.*

Prova

Proviamo la (1).

Sia $s = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

Ovviamente, dato che $D \subset E$, risulta:

$$f(z) \leq s \quad , \quad \text{per ogni punto } z \text{ di } D \quad .$$

Fissiamo un numero reale $u < s$.

Allora esiste un punto $x_0 \in E$ tale che: $u < f(x_0)$.

Poiché f è continua in x_0, esiste un intorno U di x_0 in E tale che:

$$f(x) \in]u, +\infty[\quad , \quad \text{per } x \in U \quad .$$

Ma per ipotesi D è ovunque denso in E, perciò esiste un punto $z_0 \in D$ tale che $z_0 \in U$.

Così $f(z_0) \in]u, +\infty[$, cioè $u < f(z_0)$.

Ne segue che $s = \sup\limits_{z \in D} f(z)$, cioè l'asserto.

Analogamente si prova la (2). □

%

Lemma 1.15.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione a valori chiusi e non vuoti.

Per ogni punto x' di X' sia $s(x', \cdot) : T \to \mathbb{R}_\infty$ la funzione definita da:

$$s(x', t) = s(x', F(t)) = \sup_{x \in F(t)} x'(x)$$

per ogni t in T.

Se F è misurabile, allora la funzione $s(x', \cdot)$ è misurabile, per ogni x' in X'.

Prova

Supponiamo che F sia una multifunzione misurabile e fissiamo un funzionale x' in X'.

Per il teorema 1.13, F ammette una successione di selettori misurabili $(\sigma_n)_n \subset S_F$, tale che:

$$F(t) = \overline{\Big\{\sigma_n(t)\Big\}_n} \quad ,$$

per ogni punto t di T.

Sia $n = 1, 2...$ fissato.

Poiché σ_n è misurabile, per quanto esposto nell'osservazione 1.3, σ_n è debolmente misurabile e quindi l'applicazione $x'\sigma_n : T \to \mathbb{R}$ definita da:

$$(x'\sigma_n)(t) = x'(\sigma_n(t)) \quad , \ \text{per ogni } t \text{ in } T$$

è misurabile come funzione a valori reali.

Sia ora t un fissato punto di T.

Visto che $\Big\{\sigma_n(t)\Big\}_n$ è ovunque denso in $F(t)$ e che $x' : X \to \mathbb{R}$ è continua, per la proposizione 1.14, si deduce che:

$$s(x', t) = s(x', F(t)) = \sup_{x \in F(t)} x'(t) = \sup_n x'(\sigma_n(t)) = \sup_n (x'\sigma_n)(t) \quad .$$

Perciò l'applicazione $s(x', \cdot)$ è misurabile, cioè $s(x', \cdot) \in M(T, \tilde{\mathbb{R}})$.

Per l'arbitrarietà di $x' \in X'$, segue l'asserto. $\square$

%

Proposizione 1.16.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione misurabile a valori chiusi e non vuoti.

Siano $f : T \to \mathbb{R}$ una applicazione $\mathscr{T}$-misurabile ed $e : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua.

Definiamo la multifunzione $H : T \to 2^X$ come

$$H(t) = \Big\{ x \in F(t) \ \Big| \ e(x) \geq f(t) \Big\}$$

per ogni $t \in T$.

Allora $H : T \to 2^X$ è una multifunzione a valori chiusi che risulta a grafico misurabile.

Prova

Proviamo innanzi tutto che H è a valori chiusi.

Fissiamo un punto t di T .

Se $H(t) = \emptyset$ non c'è nulla da provare.

Sia dunque $x_0 \in \overline{H(t)}$.

Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in $H(t)$ convergente ad x_0. Pertanto $x_0 \in F(t)$, in quanto $F(t)$ è chiuso.

Poiché $e(x_n) \geq f(t)$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$, dalla continuità di e discende:

$$e(x_0) = \lim_n e(x_n) \geq f(t) \quad .$$

Per definizione il grafico di H è:

$$G(H) = \Big\{ (t,x) \in T \times X \ \Big| \ x \in H(t) \Big\} \quad ,$$

e quindi:

$$G(H) = \Big\{ (t,x) \in T \times X \ \Big| \ x \in F(t) \Big\} \cap \Big\{ (t,x) \in T \times X \ \Big| \ e(x) \geq f(t) \Big\} = \\ = G(F) \cap A$$

dove si è posto:

$$A = \Big\{ (t,x) \in T \times X \ \Big| \ e(x) \geq f(t) \Big\} \quad .$$

Definiamo l'applicazione $\psi : T \times X \to \mathbb{R}$ come segue:

$$\psi(t,x) = f(t) - e(x) \quad , \quad \text{per ogni } (t,x) \in T \times X \quad .$$

Poiché f è $\mathscr{T}$-misurabile ed e è $\mathscr{B}(X)$-misurabile si ha che ψ è $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(X)$-misurabile. Così

$$A = \Big\{(t,x) \in T \times X \;\Big|\; \psi(t,x) \leq 0\Big\} \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(X) \quad .$$

Inoltre, per il teorema 1.13, F è a grafico misurabile.

In conclusione A e $G(F)$ appartengono a $\mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(X)$.

Quindi $G(H) = G(F) \cap A \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{B}(X)$.

Così H è a grafico misurabile.

Notiamo che in questa proposizione si è commesso un abuso di linguaggio chiamando multifunzione la H, in quanto la stessa può avere, in generale, dei valori vuoti.

Comunque se H è a valori non vuoti, per quanto provato e per il teorema 1.13, H è una multifunzione misurabile. $\square$

%

Osserviamo che l'asserto della proposizione precedente sussiste anche nel caso in cui f sia a valori in $\mathbb{R}_\infty$ o in $\tilde{\mathbb{R}}$.

%

2 L'integrale di Aumann

La seguente definizione è stata data da Aumann in [3] ed estende alle multifunzioni il concetto di integrale.

%

Definizione 2.1.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione.

Per ogni $E \in \mathscr{T}$, l'<u>INTEGRALE SU E</u> della multifunzione F è definito da:

$$\int_E F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \left\{ \int_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \;\middle|\; \sigma \in S_F \cap L_1(T, X) \right\} \quad .$$

Indicheremo semplicemente con $\displaystyle\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ l'integrale di F su T .

%

Definizione 2.2.
Diremo che una multifunzione $F : T \to 2^X$ è <u>INTEGRALMENTE LIMITATA</u> se esiste una funzione $g \in L_1(T)$, $g \geq 0$ tale che

$$\|F(t)\| \leq g(t) \quad , \textit{per ogni} \quad t \in T \quad .$$

%

Proposizione 2.3.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione integralmente limitata.

Allora ogni selettore misurabile di F è integrabile, cioè $S_F \subset L_1(T, X)$.

Pertanto, se F è misurabile e a valori chiusi, non vuoti, allora risulta:

$$\int_E F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset \quad .$$

Prova

Sia $g \in L_1(T)$, $g \geq 0$ tale che:

$$\|F(t)\| \leq g(t) \quad , \text{per ogni} \quad t \in T \quad .$$

Sia $\sigma \in S_F$ un selettore misurabile di F.

Ovviamente la misurabilità di σ, implica la misurabilità di $\|\sigma(\cdot)\|$.
Inoltre vale:

$$0 \leq \|\sigma(t)\| \leq \|F(t)\| \leq g(t) \quad , \text{per ogni} \quad t \in T \quad .$$

Da cui segue che:

$$\int \|\sigma(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) \leq \int g(t) \, \mathrm{d}\mu(t) < +\infty \quad , \text{quindi}$$

quindi $\|\sigma(\cdot)\|$ è integrabile, ovvero $\sigma \in L_1(T, X)$.

Quindi $S_F \subset L_1(T, X)$.

Supponiamo ora che F sia misurabile e a valori chiusi, non vuoti.

Per il teorema 1.13 del paragrafo precedente si ha che F possiede un selettore misurabile σ. Così $S_F \neq \emptyset$.

Ma allora, per quanto già provato, risulta che σ è integrabile e per la definizione 2.1 si ha:

$$\int \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \in \int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

cioè $\int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset$.

□

%

Definizione 2.4.
Diremo che un insieme $A \in \mathscr{T}$ è un <u>*ATOMO*</u> *per la misura μ se $\mu(A) > 0$ e se:*

$$E \in \mathscr{T} \ , \ E \subset A \quad \textit{implica che} \quad \mu(E) = 0 \quad \textit{oppure} \quad \mu(E) = \mu(A) \quad .$$

Diremo che la misura μ è <u>*NON-ATOMICA*</u> *se non possiede atomi.*

%

Enunciamo ora il teorema di Lyapunov, per la cui prova rimandiamo, per esempio, ad Halmos [15].

%

Teorema 2.5 (Lyapunov)**.**
Supponiamo che la misura μ sia non-atomica.

Allora il rango di μ, cioè:

$$\mu(\mathscr{T}) = \Big\{\mu(E) \;\Big|\; E \in \mathscr{T}\Big\}$$

è un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}$, ovvero $\mu(\mathscr{T}) = [0, \mu(T)]$.

%

Corollario 2.6.
Supponiamo che la misura μ sia non-atomica.

Allora per ogni $E \in \mathscr{T}$ e per ogni $a \in [0,1]$ esiste un insieme misurabile $S \in \mathscr{T}$, $S \subset E$ tale che:

$$\mu(S) = a\mu(E) \quad .$$

Prova

Sia $E \in \mathscr{T}$ un insieme misurabile.

Allora $\mathscr{T}_E = \Big\{S \in \mathscr{T} \;\Big|\; S \subset E\Big\}$ è una σ-algebra di sottoinsiemi di E e l'applicazione $\mu_E : \mathscr{T}_E \to \mathbb{R}$ è una misura su $\mathscr{T}_E$, positiva e finita.

Dato che μ non ha atomi neppure μ_E possiede atomi su $\mathscr{T}_E$.

Per il teorema 2.5 allora:

$$\mu_E(\mathscr{T}_E) = [0, \mu_E(E)] = [0, \mu(E)] \quad ,$$

cioè $\mu_E(\mathscr{T}_E) = [0, \mu(E)]$.

Sia ora $a \in [0,1]$.

Pertanto $0 \le a\mu(E) \le \mu(E)$ e quindi esiste $S \in \mathscr{T}_E$ tale che $\mu(S) = a\mu(E)$.

Per la definizione di $\mathscr{T}_E$ segue l'asserto. $\square$

%

Lemma 2.7.
Sia $F : T \to 2^X$ *una multifunzione.*

Supponiamo che $\sigma_1, \sigma_2 : T \to X$ *siano due selettori misurabili ed integrabili di* F. *Sia* $E \in \mathscr{T}$ *un sottoinsieme misurabile di* T.

Allora la funzione $\sigma = \chi_E \sigma_1 + \chi_{E^c} \sigma_2 : T \to X$, *definita da*

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & , \text{ se } t \in E \\ \\ \sigma_2(t) & , \text{ se } t \notin E \end{cases}$$

è ancora un selettore misurabile ed integrabile di F .
Infine valgono:

$$\int_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_E \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

$$\int_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{E^c} \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Prova

Per ipotesi $\sigma_1, \sigma_2 \in L_1(T, X)$ e

$$\sigma_1(t) \in F(t) \quad , \quad \sigma_2(t) \in F(t) \quad , \quad \text{per ogni } \ t \in T \quad .$$

Ma se $t \in T$, allora $t \in E$ e quindi $\sigma(t) = \sigma_1(t) \in F(t)$ oppure $t \notin E$ e così $\sigma(t) = \sigma_2(t) \in F(t)$, cioè σ è un selettore di F .

Poiché $E \in \mathscr{T}$ e σ_1, σ_2 sono integrabili, le applicazioni $\chi_E \sigma_1$, $\chi_{E^c} \sigma_2$ sono integrabili.

Allora $\sigma = \chi_E \sigma_1 + \chi_{E^c} \sigma_2$ è integrabile ovvero $\sigma \in L_1(T, X)$.

Infine si ha che:

$$\int_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \chi_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \chi_E \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_E \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

$$\int_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \chi_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \chi_{E^c} \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{E^c} \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

□

%

Il teorema successivo generalizza un teorema fondamentale dovuto a [18].

Inoltre esso contiene, come caso particolare, il Teorema 7.2 enunciato da Datko [10] e che egli stesso ha provato nel Teorema 1 di [9].

%

Teorema 2.8 (Datko [10], Richter [18]).
Supponiamo che la misura μ sia non-atomica.

Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione.

Allora cl $\displaystyle\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ *è un sottoinsieme chiuso e convesso di X.*

Prova

Evidentemente *cl* $\displaystyle\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ è un sottoinsieme chiuso di X.

Resta da provare che è convesso.

Supponiamo quindi che *cl* $\displaystyle\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ contenga almeno due punti distinti di X.

In questo caso dividiamo la prova in due parti.

<u>Passo</u> 1

Proviamo qui che comunque si fissino due punti r_1, r_2 di *cl* $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ e due numeri reali $\epsilon, a > 0$ con $0 < a < 1$ esiste un punto $r \in$ *cl* $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ tale che:

$$\|r - ar_1 - (1-a)r_2\| < \epsilon \quad .$$

Fissiamo dunque r_1, r_2, ϵ, a come sopra.

Allora esistono due selettori misurabili ed integrabili $\sigma_1, \sigma_2 : T \to X$ di F, tali che:

$$r_1 = \int \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \qquad \text{e}$$

$$r_2 = \int \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \qquad .$$

Per la definizione 1.4 esistono due successioni $(\varphi_{1,n})_n$ e $(\varphi_{2,n})_n$ di funzioni semplici, della forma:

$$\varphi_{1,n} = \sum_{j=1}^{m_n} \chi_{S_j^n} x_{1,j} \ ; \qquad \varphi_{2,n} = \sum_{j=1}^{m_n} \chi_{S_j^n} x_{2,j}$$

per $n = 1, 2, \ldots$, che convergono quasi ovunque a σ_1 e σ_2, rispettivamente, e tali che:

$$\lim_n \int \|\varphi_{1,n}(t) - \sigma_1(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \quad ,$$

$$\lim_n \int \|\varphi_{2,n}(t) - \sigma_2(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \quad .$$

Sia $A \in \mathscr{T}$ un insieme misurabile.

Allora da:

$$0 \leq \int_A \|\varphi_{1,n}(t) - \sigma_1(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) \leq \int \|\varphi_{1,n}(t) - \sigma_1(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t)$$

$$0 \leq \int_A \|\varphi_{2,n}(t) - \sigma_2(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) \leq \int \|\varphi_{2,n}(t) - \sigma_2(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t)$$

per ogni $n = 1, 2, \ldots$, deduciamo che risulta:

$$\lim_n \int_A \|\varphi_{i,n}(t) - \sigma_i(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \quad , \quad i = 1, 2$$

uniformemente rispetto ad $A \in \mathscr{T}$.

In corrispondenza ad $\epsilon/3$ esiste quindi un intero N tale che:

$$(+) \qquad \int_A \|\varphi_{i,n}(t) - \sigma_i(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) < \epsilon/3 \quad , \quad i = 1, 2$$

per ogni insieme misurabile $A \in \mathscr{T}$.

Sia $j = 1, \ldots, m_N$.

Allora S_j^N è un sottoinsieme misurabile di T.

Poiché, per ipotesi, μ è non-atomica, per il corollario 2.6, in corrispondenza ad a esiste un sottoinsieme $S_j \in \mathscr{T}$, $S_j \subset S_j^N$ tale:

$$\mu(S_j) = a\mu(S_j^N) \quad .$$

Poiché si sono supposti $S_1^N, ..., S_{m_N}^N$ a due a due disgiunti, anche $S_1, ..., S_{m_N}$ sono a due a due disgiunti.

Poniamo $E = \bigcup\limits_{j=1}^{m_N} S_J \in \mathscr{T}$.

Notiamo che per la definizione di E si ha che $S_j = S_j^N \cap E$, $j = 1, ..., m_N$ e quindi

$$E = \bigcup_{j=1}^{m_N} (S_j^N \cap E)$$

dove l'unione è disgiunta.

Pertanto

$$\begin{aligned} a\int \varphi_{i,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) &= a\sum_{j=1}^{m_N} \mu(S_j^N)x_{i,j} = \\ &= \sum_{j=1}^{m_N} a\mu(S_j^N)x_{i,j} = \sum_{j=1}^{m_N} \mu(S_j)x_{i,j} = \\ &= \sum_{j=1}^{m_N} \mu(S_j \cap E)x_{i,j} = \int\limits_E \varphi_{i,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \end{aligned}$$

per $i = 1, 2$.

Poiché

$$\int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_E \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int\limits_{E^c} \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

risulta

$$\begin{aligned} \int\limits_{E^c} \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) &= \int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \int\limits_E \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \\ &= \int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - a\int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \\ &= (1-a)\int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi provato che:

$$a\int \varphi_{1,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_E \varphi_{1,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

$$(1-a)\int \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_{E^c} \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

Definiamo la funzione $\sigma : T \to X$ come

$$\sigma = \chi_E \sigma_1 + \chi_{E^c} \sigma_2 \quad .$$

Dato che σ_1, σ_2 sono due selettori misurabili ed integrabili, per il lemma 2.7, σ è un selettore misurabile ed integrabile di F. Inoltre risultano:

$$\int\limits_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_E \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

$$\int\limits_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int\limits_{E^c} \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

In conclusione $r = \displaystyle\int \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \in \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$

Per quanto stabilito fino ad ora, risulta:

$$\left\| \int \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - a \int \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - (1-a) \int \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int\limits_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - a \int \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - (1-a) \int \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \int\limits_E \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \int\limits_E \varphi_{1,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int\limits_E \varphi_{1,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - a \int \sigma_1(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| +$$

$$+ \left\| \int\limits_{E^c} \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \int\limits_{E^c} \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) + \int\limits_{E^c} \varphi_{2,N}(t)\,\mathrm{d}\mu(t) - (1-a) \int \sigma_2(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_E \Big[\sigma_1(t) - \varphi_{1,N}(t)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) + a \int \Big[\varphi_{1,N}(t) - \sigma_1(t)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| +$$

$$+ \left\| \int\limits_{E^c} \Big[\sigma_2(t) - \varphi_{2,N}(t)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) + (1-a) \int \Big[\varphi_{2,N}(t) - \sigma_2(t)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_E \Big\|\sigma_1(t) - \varphi_{1,N}(t)\Big\|\,\mathrm{d}\mu(t) + a \int \Big\|\varphi_{1,N}(t) - \sigma_1(t)\Big\|\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$+ \int\limits_{E^c} \Big\|\sigma_2(t) - \varphi_{2,N}(t)\Big\|\,\mathrm{d}\mu(t) + (1-a) \int \Big\|\varphi_{2,N}(t) - \sigma_2(t)\Big\|\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Ricordando che:

$$r1 = \int \sigma_1 t \, \mathrm{d}\mu(t) \ ; \quad r2 = \int \sigma_2 t \, \mathrm{d}\mu(t) \ ;$$

$$r = \int \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

e che vale la (+), uniformemente rispetto ad $A \in \mathscr{T}$, si deduce che:

$$\begin{aligned}
&\|r - ar_1 - (1-a)r_2\| \leq \\
&\leq \int_E \left\|\varphi_{1,N}(t) - \sigma_1(t)\right\| \mathrm{d}\mu(t) + a \int \left\|\varphi_{1,N}(t) - \sigma_1(t)\right\| \mathrm{d}\mu(t) + \\
&+ \int_{E^c} \left\|\varphi_{2,N}(t) - \sigma_2(t)\right\| \mathrm{d}\mu(t) + (1-a) \int \left\|\varphi_{2,N}(t) - \sigma_2(t)\right\| \mathrm{d}\mu(t) < \\
&< \frac{\epsilon}{3} + a\frac{\epsilon}{3} + (1-a)\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad .
\end{aligned}$$

e quindi resta provato il passo 1 .

<u>Passo</u> 2

Proviamo che $cl \int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$ è un sottoinsieme convesso di X.

Siano $r_1, r_2 \in cl \int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$ e fissiamo un numero reale a nell'intervallo aperto $]0, 1[$.

Per ogni $n = 1, 2...$ esistono $r_{1,n}$ e $r_{2,n}$ di $\int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$, tali che:

$$\|r_1 - r_{1,n}\| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|r_2 - r_{2,n}\| < \frac{1}{n} \ .$$

Fissiamo un intero n.

Dato che $r_{1,n}$ e $r_{2,n}$ sono due punti di $\int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$, per il passo 1, in corrispondenza ad $1/n$ ed ad a, esiste un elemento $\overline{r}_n$ di $\int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$, tale che:

$$\|\overline{r}_n - ar_{1,n} - (1-a)r_{2,n}\| < \frac{1}{n} \quad .$$

Pertanto risulta:

$$\begin{aligned}
\|ar_1 + (1-a)r_2 - \overline{r}_n\| &= \|ar_1 + (1-a)r_2 + ar_{1,n} - ar_{1,n} + (1-a)r_{2,n} - (1-a)r_{2,n} - \overline{r}_n\| \leq \\
&\leq a\|r_1 - r_{1,n}\| + (1-a)\|r_2 - r_{2,n}\| + \|ar_{1,n} + (1-a)r_{2,n} - \overline{r}_n\| < \\
&< a\frac{1}{n} + (1-a)\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \quad .
\end{aligned}$$

Ne segue che per ogni $n = 1, 2, ...$ abbiamo individuato un elemento $\overline{r}_n$ di $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ tale che:

$$\|ar_1 + (1-a)r_2 - \overline{r}_n\| < \frac{2}{n} \quad .$$

Pertanto:

$$\lim_n \|ar_1 + (1-a)r_2 - \overline{r}_n\| = 0 \quad .$$

cioè la successione $(\overline{r}_n)_n \subset \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$, converge in norma al punto $ar_1 + (1-a)r_2$.

Così abbiamo provato che

$$ar_1 + (1-a)r_2 = \lim_n \overline{r}_n$$

appartiene a $cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$, ovvero che $cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ è convesso in X.

$\square$

%

3 Integrale di Aumann e funzioni supporto

In questo paragrafo proveremo un teorema che mostra come, sotto opportune ipotesi, il calcolo dell'integrale di una multifunzione possa ridursi al calcolo degli integrali di particolari funzioni a valori reali, cioè delle funzioni supporto.

Tale teorema generalizza agli spazi infinito dimensionali il Lemma 2.2 provato da Artstein in [1] .

In questo paragrafo supporremo inoltre che la misura $\mu : \mathscr{T} \to \mathbb{R}_0^+$, sia <u>non-atomica</u> .

%

Teorema 3.1.
Sia $F : T \to X$ una multifunzione misurabile e a valori chiusi, non vuoti.

Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

(i) esiste una funzione integrabile $g \in L_1(T)$, $g \geq 0$, tale che per ogni $x' \in S'$ si ha:

$$-g(t) \leq s(x', F(t)) < +\infty \ , \ \text{per ogni} \quad t \in T \ ;$$

(ii) l'integrale della F è non vuoto:

$$\int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset \ .$$

Allora per ogni $x' \in X'$, risulta:

$$s\left(x', cl \int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t)\right) = s\left(x', \int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t)\right) = \\ = \int s(x', F(t))\, \mathrm{d}\mu(t)$$

e inoltre

$$cl \int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \\ = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq \int s(x', F(t))\, \mathrm{d}\mu(t) \ , \ \text{per ogni} \ \ x' \in X' \right\} .$$

Prova

Poniamo , per ogni $x' \in X'$:

$$s(x',t) = s(x',F(t)) \ , \ \text{ per ogni } t \in T \ ,$$

pertanto $s(x',\cdot) : T \to \mathbb{R}$ in virtù della (i) .

Sia ora $x' \in X'$.

Dalla ipotesi (i) discende che

$$(+) \qquad s(x',t) \geq -g(t)\|x'\| \ , \ \text{ per ogni } \ t \in T \ .$$

Poiché F è misurabile e a valori chiusi, non vuoti, per il lemma 1.15, l'applicazione $s(x',\cdot) : T \to \mathbb{R}$ risulta misurabile.

Dalla (+) si deduce che:

$$0 \leq s^-(x',t) \leq \|x'\|g(t) \ , \ \text{ per ogni } \ t \in T$$

dove $s^-(x',\cdot)$ è la parte negativa di $s(x',\cdot)$.

Dato che $g \in L_1(T)$ si ha:

$$0 \leq \int s^-(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) \leq \|x'\| \int g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) < +\infty \quad .$$

In virtù della misurabilità di $s(x',\cdot)$ risulta

$$\int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int s^+(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \int s^-(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

e, per l'ipotesi (i), tale integrale è un numero reale oppure è $+\infty$.

Ne segue che, per l'arbitrarietà di $x' \in X'$, l'applicazione $s : X' \to \mathbb{R}_\infty$, definita da

$$s(x') = \int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) \ , \ \text{ per ogni } \ x' \in X' \quad ,$$

è ben posta.

Proviamo che s è un funzionale sublineare semicontinuo inferiormente.

Osserviamo innanzi tutto che dalla sublinearità di $s(\cdot, t)$, per ogni $t \in T$, e dalla linearità dell'operatore integrale discende immediatamente che:

$$s(x' + y') \leq s(x') + s(y') \ ,$$

$$s(ax') = as(x') \ ,$$

per ogni x', x' in X' e per ogni $a \in \mathbb{R}_0^+$, in altre parole s è un funzionale sublineare.

Sia ora x'_0 un punto di X' e fissiamo una successione $(x'_n)_n$ in X', convergente ad x'_0.

Ovviamente allora tale successione è limitata, cioè esiste un numero reale $M > 0$, tale che:

$$\|x'_n\| \leq M \quad , \quad \text{per ogni } n = 1, 2, \ldots \ .$$

Sia t in T .

Per il lemma 3.1 del Capitolo 2 la funzione supporto $s(t, F(t))$ di $F(t)$ è un funzionale sublineare e semicontinuo inferiormente su X'.

Allora dal teorema 1.6 del Capitolo 2 deduciamo che

$$s(x'_0, F(t)) \leq \operatorname*{minlim}_n s(x'_n, t) \quad , \quad \text{per ogni } t \in T \ .$$

Per l'arbitrarietà di $t \in T$ e con la notazione usata in detto teorema:

$$(++) \qquad s(x'_0, t) \leq \operatorname*{minlim}_n s(x'_n, t) \quad , \quad \text{per ogni } t \in T \ .$$

Dalla (+), discende che:

$$s(x'_n, t) \geq -g(t)\|x'_n\| \geq -Mg(t) \quad ,$$

per ogni $t \in T$ e per ogni $n = 1, 2, \ldots$, dove $Mg \in L_1(T)$.

Pertanto per la (++) e per il Lemma di Fatou, risulta che:

$$\begin{aligned} s(x'_0) = & \int s(x'_0, t) \, \mathrm{d}\mu(t) \leq \\ & \leq \int \operatorname*{minlim}_n s(x'_n, t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \operatorname*{minlim}_n \int s(x'_n, t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \\ & = \operatorname*{minlim}_n s(x'_n) \ . \end{aligned}$$

Allora, per il teorema 1.6 del Capitolo 2, s è un funzionale sublineare e semicontinuo inferiormente su X' .

Infine è evidente che $s(0) = 0$.

Pertanto il teorema 3.6 del Capitolo 2 ci permette di affermare che esiste un unico sottoinsieme H chiuso, convesso e non vuoto di X tale che

$$H = \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq s(x') \;,\; \text{ per ogni } x' \in X' \right\} \quad .$$

e inoltre,

$$s(x') = s(x', H) \quad , \quad \text{per ogni} \quad x' \in X' \quad .$$

Sia r un punto di $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$.

Allora $r = \int \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$, con $\sigma \in S_F \cap L_1(T, X)$.

Da ciò segue che:

$$x'(r) = x'\left(\int \sigma(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right) = \int x'(\sigma(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \leq$$

$$\leq \int s(x', t)\,\mathrm{d}\mu(t) = s(x') \quad \text{, per ogni } x' \in X' \;, \text{ ovvero}$$

$r \in H$. Così $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \subset H$.

Perciò, per la monotonia dell'estremo superiore

$$s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \right) \leq s(x', H) = s(x')$$

per ogni x' in X' .

Fissiamo un funzionale $x' in X'$.

Sia $\epsilon > 0$ un numero reale positivo.

Definiamo la multifunzione $G : T \to 2^X$ come

$$G(t) = \left\{ x \in F(t) \;\middle|\; x'(x) \geq s(x', t) - \epsilon/\mu(T) \right\}$$

per ogni $t \in T$

G è ben definita perché si è supposto $\mu(T) < +\infty$ e non è restrittivo supporre $\mu(T) > 0$.

Per ogni punto t di T, in virtù della (i), è $s(x', t) < +\infty$ e perciò risulta

$$s(x', t) - \epsilon/\mu(T) < s(x', t) = \sup_{x \in F(t)} x'(x)$$

e quindi esiste un punto $x_0 \in F(t)$ tale che

$$s(x', t) - \epsilon/\mu(T) < x'(x_0) \ .$$

così $x_0 \in G(t)$.

Allora G è a valori non vuoti.

In virtù del lemma 1.15, $s(x', \cdot)$ è $\mathscr{T}$-misurabile come funzione a valori reali e, ovviamente, $x' : X \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Allora dato che F è misurabile, a valori chiusi e non vuoti, per la proposizione 1.16, $G : T \to 2^X$ è una multifunzione a valori chiusi e non vuoti, che risulta a grafico misurabile.

Pertanto, per il teorema 1.13 G è misurabile e quindi possiede almeno un selettore misurabile $\psi : T \to X$.

Per la definizione di G è $G(t) \subset F(t)$ per ogni t in T, e quindi ψ è anche un selettore misurabile di F, con $x'(\psi(t)) \geq s(x', t) - \epsilon/\mu(T)$, per ogni $t \in T$.

Per l'ipotesi (ii) è $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset$ e quindi esiste almeno un selettore misurabile ed integrabile σ di F.

Per ogni $n = 1, 2, ...$ definiamo

$$A_n = \left\{ t \in T \;\middle|\; \|\psi(t)\| \leq n \right\} ,$$

$$B_n = \left\{ t \in T \;\middle|\; \|\psi(t)\| > n \right\} ,$$

che sono $\mathscr{T}$-misurabili per la misurabilità di ψ.

Fissiamo un intero n .

Notiamo che $A_n \cap B_n = \emptyset$ e $A_n \cup B_n = T$.

Definiamo quindi l'applicazione $\varphi_n : T \to X$ come

$$\varphi_n = \chi_{A_n} \psi + \chi_{B_n} \sigma$$

che risulta, per costruzione, un elemento di S_F .

Inoltre per la integrabilità di σ, si ha:

$$\int \|\varphi_n(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) \leq \int_{A_n} n \, \mathrm{d}\mu(t) + \int_{B_n} \|\sigma(t)\| \, \mathrm{d}\mu(t) < +\infty \ ,$$

cioè $\varphi_n \in S_F \cap L_1(T, X)$, pertanto

$$r_n = \int \varphi_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

è un punto di $\displaystyle\int F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$.

Osserviamo che:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = T \ , \quad \text{con} \quad A_n \subset A_{n+1} \ , \text{ per } \quad n = 1, 2, \ldots \quad ,$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset \ , \quad \text{con} \quad B_n \supset B_{n+1} \ , \text{ per } \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Dato che σ è integrabile e che si ha

$$\int s^-(x', t) \, \mathrm{d}\mu(t) < +\infty \quad .$$

valgono

$$(1) \ \lim_n \int_{A_n} \Big[s(x', t) - \epsilon/\mu(T) \Big] \, \mathrm{d}\mu(t) = \int \Big[s(x', t) - \epsilon/\mu(T) \Big] \, \mathrm{d}\mu(t) \ ;$$

$$(2) \ \lim_n \int_{B_n} x'(\sigma(t)) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\emptyset} x'(\sigma(t)) \, \mathrm{d}\mu(t) = 0 \ ,$$

in quanto $x'\sigma \in L_1(T)$.

Per ogni $n = 1, 2, ...$ da $r_n \in \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ discende che:

$$\begin{aligned} s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) &\geq x'(r_n) = x'\left(\int \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = \\ &= \int x'(\varphi_n(t))\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{A_n} x'(\psi(t))\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_{B_n} x'(\sigma(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \geq \\ &\geq \int_{A_n} \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_{B_n} x'(\sigma(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \quad . \end{aligned}$$

Allora da (1), (2) si deduce che:

$$\begin{aligned} s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) &\geq \lim_n \left\{ \int_{A_n} \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_{B_n} x'(\sigma(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \right\} = \\ &= \lim_n \int_{A_n} \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) + \lim_n \int_{B_n} x'(\sigma(t))\,\mathrm{d}\mu(t) = \\ &= \int \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) \quad . \end{aligned}$$

Allora

$$s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) \geq \int \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Se è $\quad s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = +\infty \quad$ allora anche

$\int \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) = +\infty \quad$ e quindi a maggior ragione

$$s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = +\infty = \int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) = s(x') \quad .$$

Se $\int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) < +\infty$, allora risulta

$$\int \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) = \int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \epsilon$$

e perciò:

$$s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) \geq \int \Big[s(x',t) - \epsilon/\mu(T)\Big]\,\mathrm{d}\mu(t) = \int s(x',t)\,\mathrm{d}\mu(t) - \epsilon = s(x') - \epsilon$$

e per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$:

$$s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) \geq s(x') \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

In conclusione:

$$s(x') = s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad .$$

Per la definizione di s :

$$s\left(x', cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = s\left(x', \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) =$$
$$= \int s(x', t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad , \quad \text{per ogni } x' \in X' \quad ,$$

essendo la prima uguaglianza ovvia.

In definitiva si è provato che per ogni $x' \in X'$ risulta

$$s\left(x', cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right) = s(x', H) \quad ,$$

pertanto in virtù dei teoremi 2.8 e 3.4 dei Capitolo 4 e 2, rispettivamente, si ha

$$cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = H =$$
$$= \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \leq \int s(x', F(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \ , \ \text{per ogni } \ x' \in X' \right\} \quad ,$$

e questo conclude il teorema.

□

%

Corollario 3.2.
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione verificante le ipotesi del teorema precedente.

Allora sussiste la seguente uguaglianza:

$$cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = cl \int \overline{co} F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Prova

In virtù del Teorema III.40 di Castaing-Valadier [7] la multifunzione $\overline{co}F : T \to 2^X$ definita da

$$(\overline{co}F)(t) = \overline{co}(F(t)) \quad , \quad \text{per ogni} \quad t \in T \quad ,$$

è misurabile.

In virtù del teorema 3.10 del Capitolo 2 la multifunzione $\overline{co}F$ verifica le ipotesi del teorema 3.1, in quanto F le soddisfa.

Pertanto risulta:

$$cl \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) =$$

$$= \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \le \int s(x', F(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \;,\; \text{ per ogni } \; x' \in X' \right\} =$$

$$= \left\{ x \in X \;\middle|\; x'(x) \le \int s(x', \overline{co}F(t))\,\mathrm{d}\mu(t) \;,\; \text{ per ogni } \; x' \in X' \right\} =$$

$$= cl \int \overline{co}F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad ,$$

come volevamo. □

%

Osservazione 3.3.
Notiamo che l'insieme $\int \overline{co}F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$*, in generale, non è chiuso, anche nel caso in cui* X *sia finito dimensionale.*

Riportiamo una leggera modifica di un esempio fornito da Aumann in [3], che illustra tale fenomeno.

Sia $T =]0,1[$, $\mathscr{T}$ *la* σ*-algebra di Lebesgue in* T *e* μ *la misura di Lebesgue su* $\mathscr{T}$ *.*

Sia $X = \mathbb{R}^2$ *con la norma usuale.*

Definiamo la multifunzione $F : T \to 2^X$ *come*

$$F(t) = \left\{ \left(\lambda \frac{1-t}{t}, \lambda \frac{t}{1-t} \right) \;\middle|\; \lambda \in [0,1] \right\}$$

per ogni t *in* T *.*

Ovviamente la F verifica la condizione (c) del teorema 1.13 ovvero,

$$F(t) = \overline{\left\{\sigma_n(t)\right\}_n} \quad ,$$

essendo $\sigma_n(t) = \left(\lambda_n \frac{1-t}{t}, \lambda_n \frac{t}{1-t}\right)$ *per ogni* $t \in T$, *dove* $(\lambda_n)_n$ *è una arbitraria denumerazione dei numeri razionali dell'intervallo* $[0,1]$ *.*

Pertanto la multifunzione F è misurabile, a valori chiusi, limitati, convessi, non vuoti, verificante le ipotesi del teorema 3.1 .

Osserviamo che $\sigma : T \to X$ *è un selettore misurabile per F se e solo se esiste* $\lambda : T \to [0,1]$ *misurabile, tale che:*

$$\sigma(t) = \left(\lambda(t)\frac{1-t}{t}, \lambda(t)\frac{t}{1-t}\right) \quad ,$$

per ogni t appartenente a T .

Inoltre se $(x,y) \in \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \overline{\mathrm{co}}F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ *e se* $x=0$ $(y=0)$, *allora* $y=0$ $(x=0)$ *.*

Per ogni $n = 1, 2, ...$ *definiamo* $\sigma_n : T \to X$ *attraverso la funzione* $\lambda_n : T \to [0,1]$ *con*

$$\lambda_n = \chi_{[1/4n, 1/2n]} \quad .$$

Pertanto, per ogni $n = 1, 2, ...$ *si ha:*

$$\int \sigma_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \left(\log 2 - 1/4n, \log\frac{4n-1}{4n-2} - 1/4n\right)$$

con $\int \sigma_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \in \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ *.*

Ma risulta

$$\lim_n \int \sigma_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \Big(\log 2, 0\Big) \notin \int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

per quanto già osservato.

Quindi $\int F(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int \overline{\mathrm{co}}F(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ *non è un sottoinsieme chiuso di X .*

%

Corollario 3.4 (Datko [11]).
Sia $F : T \to 2^X$ una multifunzione misurabile a valori chiusi, limitati, non vuoti.

Supponiamo che F sia integralmente limitata da una funzione $g \in L_1(T)$, $g \geq 0$.

Allora

$$cl \int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int \overline{co}F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Prova

Come abbiamo fatto notare nel corollario 3.2, $\overline{co}F$ è una multifunzione misurabile.

Inoltre, in virtù del corollario 3.11 del Capitolo 2, $\overline{co}F$ è a valori chiusi, limitati, convessi, non vuoti ed è ancora integralmente limitata da g .

Per l'integrale limitatezza della F, per ogni $x' \in S'$ si ha:

$$-g(t) \leq -\|F(t)\| \leq s(x', F(t)) \leq \|F(t)\| \leq g(t) < +\infty \quad ,$$

per ogni $t \in T$, e la proposizione 2.3 di questo capitolo ci assicura che:

$$\int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \neq \emptyset \quad .$$

Allora F verifica le ipotesi del teorema 3.1 e quindi, per il corollario 3.2, si ha:

$$cl \int F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = cl \int \overline{co}F(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Proviamo che $\displaystyle\int \overline{co}F(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$ è un sottoinsieme chiuso di X .

Fissiamo $r \in cl \int \overline{co}F(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$.
Allora esiste una successione $(r_n)_n$ in $\int \overline{co}F(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$, ovvero

$$r_n = \int \sigma_n(t)\, \mathrm{d}\mu(t)$$

con $\sigma_n \in S_{\overline{co}F} \cap \text{Ł}_1(T, X)$, per $n = 1, 2, ...$ tale che:

$$\lim_n \|r_n - r\| = 0 \quad .$$

Poichè X è riflessivo e $\mu(T) < +\infty$, in virtù del Teorema 4 di Chatterji [8] l'insieme

$$K = \Big\{ \varphi \in L_1(T, X) \;\Big|\; \|\varphi(t)\| \leq g(t) \text{ , per ogni } \; t \in T \Big\}$$

è debolmente sequenzialmente compatto in $L_1(T, X)$.

Pertanto, esiste una sottosuccessione $(\sigma_q)_q$ di $(\sigma_n)_n$ che converge debolmente ad una funzione $\sigma \in L_1(T, X)$, nello spazio di Banach $L_1(T, X)$.

Facilmente si vede allora che

$$\begin{aligned} r = \lim_n r_n = \lim_n \int \sigma_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \\ = \lim_q \int \sigma_q(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = \int \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad . \end{aligned}$$

Proviamo ora che $\sigma \in S_{\overline{co}F}$.

In virtù del teorema di Mazur, esiste una successione $(\psi_m)_m$ di combinazioni convesse delle $(\sigma_q)_q$ che converge fortemente a σ in $L_1(T, X)$.

Poichè $\mu(T) < +\infty$ la successione $(\psi_m)_m$, o se necessario una sua sottosuccessione, converge quasi ovunque a σ .

Quindi $\sigma(t) \in \overline{co}F$, per ogni $t \in T$.

Ne segue che

$$r = \int \sigma(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \in \int \overline{co}F(t) \, \mathrm{d}\mu(t) \quad .$$

Pertanto:

$$\int \overline{co}F(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = cl \int \overline{co}F(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$$

e ciò, per quanto già detto, conclude la prova .

□

%

ooooooooooooooooooo

Bibliografia

[1] Z. Artstein, "*On the calculus of closed set-value functions*", Indiana Univ. Math. J., vol. 24, (1974), pp. 431-441.

[2] Z. Artstein e J.A. Burns, "*Integration of compact valued functions*", Pacific Journal, vol. 58, (1975), pp. 205-307.

[3] R.J. Aumann, "*Integrals of set-valued functions*", Journal of Math. Analysis and Applications, vol. 12, (1965), pp. 1-12.

[4] H.T. Banks e M.Q. Jacobs, "*A differential calculus for multifunctions*", Journal of Math. Analysis and Applications, vol. 29, (1970), pp. 246-272.

[5] M. Bradley e R. Datko, "*Some analytic and measure theoretic properties of set-valued functions*", Siam J. Control and Opt, vol. 15, (1977), pp. 625-635.

[6] C.L. Byrne, "*Remarks on the set-valued integrals of Debreu and Aumann*", Journal of Math. Analsys and Applications, vol. 62, (1978), pp. 243-246.

[7] C. Castaing e M. Valadier, "*Convex Analysis and measurable multifunctions*", Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[8] S.D. Chatterji, "*Weak convergence in certain special Banach spaces*", MRC Technical Sum. Report #443, (1963).

[9] R. Datko, "*Convexity properties of some integral Operators*", Journal of Differential Equations, vol. 7, (1970), pp. 203, 216.

[10] R. Datko, "*Measurability properties of set-valued mappings in a Banach Space*", Siam J. Control and Opt, vol. 8, (1970), pp. 226-238.

[11] R. Datko, "*On the integration of set-valued mappings in a Banach space*", Fund. Math., vol. 78, (1973), pp. 205-208.

[12] G. Debreu, "*Integration of correspondences*", Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., vol. 2, (1967), pp. 351-372, University of California Press, Berkeley, 1967.

[13] N. Dunford e J.T. Schwartz, "*Linear Operators*", part I, Wiley (Interscience), New York, (1958).

[14] I. Ekeland e R. Teman, "*Convex analysis and variational problems*", North-Holland American Elsevier (1976).

[15] P.R. Halmos, "*The range of a vector measure*", Bull. Amer. Soc., vol. 54, (1948), pp. 416-421.

[16] C.J.O. Jameson, "*Topology of normed spaces*", Chapman and Hall, London (1974).

[17] H. Rådström, "*An embedding theorem for spaces of convex sets*", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3, (1952), pp. 165-169.

[18] H. Richter, "*Verallgemainerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie*", Math. Annalen, vol. 150, (1963), 85-90 (for corrections to this article see the same volume, pp. 440-441).

[19] D.H. Wagner, "*Survey of measurable selection theorems*", Siam J. Control and Opt., vol. 15, (1977), pp. 589-903.

Indice